Nome: ____

RA: ____

Assinatura: ____

Observações:

- Leia todas as perguntas antes de começar. Você pode solicitar esclarecimentos durante a prova.
- Explique e justifique todas as respostas.
- Você também pode obter pontos por respostas parciais.
- É proibida qualquer tipo de consulta bibliográfica.
- A prova é individual, qualquer detecção de fraude implicará em zerar a nota.

Questão 1 *Dados um conjunto de elementos X e uma coleção (conjunto) $\mathcal{C}$ de subconjuntos de X, uma* ***transversal*** *de X e $\mathcal{C}$ é um subconjunto T de X, tal que T possui pelo menos um elemento em comum com qualquer conjunto em $\mathcal{C}$, ou seja: para todo $S \in \mathcal{C}$, $T \cap S \neq \emptyset$.*

Um problema de decisão amplamente estudado é, dados X, $\mathcal{C}$ e um inteiro $k > 0$, saber se existe uma transversal T, com tamanho no máximo k. Uma linguagem para este problema é:

$$TRANSVERSAL = \{\langle X, \mathcal{C}, k\rangle \mid \textit{existe uma transversal } T \textit{ de } X \textit{ e } \mathcal{C}, \textit{ com } |T| \leq k\}$$

Responda as seguintes questões:

(a) ***(2.0 pt)*** *Demonstre que $TRANSVERSAL$ é NP-difícil. Para isso, são listadas no final da prova as linguagens que pode assumir são NP-completas.*

Resposta. *Observe que, no problema $COBERTURA\_VERTICES$, desejamos selecionar um conjunto de k vértices de maneira que cada aresta possua pelo menos um de seus vértices nesse conjunto. Se interpretarmos cada aresta como um subconjunto de dois vértices, o problema equivale a encontrar uma transversal de V em E com tamanho k. Assim, para demonstrar que $TRANSVERSAL$ é NP-difícil, podemos realizar uma redução polinomial a partir do problema NP-completo $COBERTURA\_VERTICES$. A seguir, apresentamos a prova:*

- *Dada uma entrada $\langle G = (V, E), k\rangle$ para $COBERTURA\_VERTICES$, definimos uma entrada $\langle X, \mathcal{C}, k'\rangle$ para $TRANSVERSAL$ como segue:*

  - *X é o conjunto de vértices de G ($X = V$).*
  - *$\mathcal{C}$ contem conjuntos de dois vértices, de forma tal que definam as arestas de G ($\mathcal{C} = \{\{u, v\} \,|\, (u, v) \in E\}$.*
  - *$k' = k$, procuramos por uma transversal com o mesmo tamanho da cobertura.*

- *Construir $\langle X, \mathcal{C}, k' \rangle$ a partir de $\langle G = (V, E), k \rangle$ equivale, essencialmente, a copiar o grafo G, o que pode ser realizado com complexidade $O(V + E)$. Assim, a redução proposta é polinomial.*
- *Para que a redução seja válida, é necessário demonstrar que existe uma cobertura de vértices de tamanho k em G se, e somente se, existe uma transversal de X em $\mathcal{C}$ com tamanho no máximo k. Aqui, assumimos que $k \leq |V|$, pois, caso contrário, a resposta para o problema de cobertura de vértices seria **não**.*

($\Rightarrow$) *Seja $S \subseteq V$ uma cobertura de vértices de G com tamanho k. Isso implica que cada aresta em E possui pelo menos um de seus extremos em S. Como os subconjuntos de X em $\mathcal{C}$ correspondem às arestas de E, segue que S contém pelo menos um elemento de cada subconjunto em $\mathcal{C}$. Portanto, concluímos que S é uma transversal de X em $\mathcal{C}$ com tamanho k.*

($\Leftarrow$) *Seja $S \subseteq X$ uma transversal de X em $\mathcal{C}$ com tamanho no máximo k. Isso significa que cada subconjunto de X em $\mathcal{C}$ contém pelo menos um elemento de S. Como os subconjuntos de X em $\mathcal{C}$ correspondem às arestas em E, concluímos que S contém pelo menos um vértice de cada aresta em E. Portanto, S é uma cobertura de vértices de G com tamanho no máximo k. Além disso, se S já é uma cobertura, adicionar vértices a S mantém sua propriedade de cobertura, pois as arestas de G continuam tendo pelo menos um vértice em S. Assim, se $|S| < k$, basta adicionar $k - |S|$ vértices a S para obter uma cobertura de tamanho exatamente k.*

(b) ***(1.0 pt)*** *$TRANSVERSAL$ é NP-completa? Prove a sua resposta.*

Resposta. *Sim, para que um problema seja NP-completo, ele deve ser NP-difícil (como provado no item anterior) e também pertencer à classe NP. Assim, demonstraremos que $TRANSVERSAL$ pertence à classe NP, apresentando o seguinte verificador polinomial:*

- *$V(\langle X, \mathcal{C}, k \rangle, \langle T \rangle)$:*

*Se $|T| > k$, então devolva **0***
*Se $T \not\subseteq X$, então devolva **0***
Para cada $S \in \mathcal{C}$:
    *Se $S \cap T = \emptyset$, então devolva **0***
*Devolda **1***

No verificador apresentado anteriormente, dada uma instância $\langle X, \mathcal{C}, k\rangle$ *de* $TRANSVERSAL$*, consideramos como certificado um subconjunto* T *de* X*. É evidente que o tamanho do certificado é polinomial em relação ao tamanho da instância:*

$$|\langle T\rangle| \leq |\langle X\rangle| \leq |\langle X, \mathcal{C}, k\rangle|$$

O verificador também é polinomial, denotando por $n = |X|$ *e* $m = |\mathcal{C}|$*, o algoritmo requer* $O(m \cdot n^2)$ *operações:*

- *A linha **1** pode ser executada em* $O(1)$ *se a codificação de* T *incluir o número de elementos, ou em* $O(n)$ *caso essa informação não esteja presente.*
- *A linha **2** requer* $O(n^2)$ *operações. Ela percorre os elementos de* T *em* $O(n)$ *e, para cada elemento, verifica sua presença em* X *em* $O(n)$*.*
- *As linhas **3** e **4** requerem* $O(m \cdot n^2)$ *operações. Percorremos os subconjuntos em* $\mathcal{C}$ *em* $O(m)$ *e, para cada elemento* $S \in \mathcal{C}$*, verificamos se* $S \cap T \neq \emptyset$*. Essa verificação pode ser realizada percorrendo os elementos de* S *em* $O(n)$ *e, para cada um deles, procurando-o em* T *em* $O(n)$*.*

Agora provaremos que $\langle X, \mathcal{C}, k\rangle \in TRANSVERSAL$ *se, e somente se, existe um subconjunto* T *tal que* $V(\langle X, \mathcal{C}, k\rangle, \langle T\rangle) = 1$*:*

($\Rightarrow$) *Se* $\langle X, \mathcal{C}, k\rangle \in TRANSVERSAL$*, então existe um subconjunto* $T \subseteq X$ *tal que* $|T| \leq k$ *e, para todo* $S \in \mathcal{C}$*,* $S \cap T \neq \emptyset$*. Note que, ao utilizarmos esse* T *como certificado, o verificador proposto devolve* 1*: como* $|T| \leq k$*, a linha **1** não devolve* 0*; como* $T \subseteq X$*, a linha **2** também não devolve* 0*; e como, para todo* $S \in \mathcal{C}$*,* $S \cap T \neq \emptyset$*, a linha **4** não devolve* 0*. Dessa forma, o algoritmo chega à linha **5** e devolve* 1*.*

($\Leftarrow$) *Se* $V(\langle X, \mathcal{C}, k\rangle, \langle T\rangle) = 1$ *para algum* T*, então o verificador: não devolve* 0 *na linha **1**, o que implica que* $|T| \leq k$*; não devolve* 0 *na linha **2**, o que significa que* $T \subseteq X$*; e não devolve* 0 *na linha **4**, o que garante que* $S \cap T \neq \emptyset$ *para todo* $S \in \mathcal{C}$*. Assim,* T *é uma transversal de* X *e* $\mathcal{C}$ *que satisfaz* $|T| \leq k$*. Logo,* $\langle X, \mathcal{C}, k\rangle \in TRANSVERSAL$*.*

(c) ***(1.0 pt)*** *Uma variação para o problema da transversal, é o da **transversal colorida**. Neste problema, cada elemento* $e \in X$ *possui uma cor* $c(e)$ *e a transversal, além de ter tamanho máximo* K*, não pode ter dois elementos com a mesma cor:*

$TRANSVERSAL\_COLORIDA = \{\langle X, \mathcal{C}, c, k\rangle \mid$ *existe uma transversal* T *de* X *e* $\mathcal{C}$*, com* $|T| \leq k$ *e que* $\forall e_1, e_2 \in T, c(e_1) \neq c(e_2)\}$

$TRANSVERSAL\_COLORIDA$ *é* NP*-completa? Justifique sucintamente a sua resposta (pode se basear nos itens anteriores).*

Resposta. *Observe que o mesmo verificador proposto no item anterior pode ser utilizado para* $TRANSVERSAL\_COLORIDA$*, com a adição de uma verificação* *extra: para cada par de elementos em T, o verificador retorna* 0 *caso esses elementos tenham a mesma cor. Essa modificação adiciona mais $O(n^2)$ operações ao verificador, mantendo a mesma complexidade do item anterior, ou seja, $O(m \cdot n^2)$. Assim, podemos concluir que o problema está em* NP.

Para garantir que seja NP*-difícil, basta observar que, dada uma instância de $TRANSVERSAL$, se atribuirmos uma cor diferente a cada elemento de X, obtemos uma instância de $TRANSVERSAL\_COLORIDA$ onde qualquer transversal válida também é uma transversal colorida. Essa construção estabelece uma redução polinomial de $TRANSVERSAL$ para $TRANSVERSAL\_COLORIDA$.*

Como $TRANSVERSAL\_COLORIDA$ pertence à classe NP *e é* NP*-difícil, podemos concluir que o problema é* NP*-completo.*

(d) ***(1.5 pt)*** *Proponha um modelo de Programação Linear Inteira (PLI) para a versão de otimização de $TRANSVERSAL\_COLORIDA$. Observe que, no geral, se deseja uma transversal tão pequena quanto possível. Explique, de forma sucinta, o domínio e o significado das variáveis e das restrições.*

Resposta. *Considere uma instância $\langle X, \mathcal{C}, c\rangle$ da versão de otimização do problema da transversal colorida. Uma solução para esse problema deve determinar quais elementos de X pertencem à transversal T e quais não. Para isso, definimos as seguintes variáveis binárias para cada elemento $e \in X$:*

$$x_e = \begin{cases} 1, & \text{se } e \text{ pertence a } T \\ 0, & \text{em outro caso} \end{cases}$$

O objetivo é encontrar a menor transversal colorida possível, ou seja, desejamos minimizar o número de elementos selecionados em T, o que pode ser expresso da seguinte forma:

$$\min \quad \sum_{e \in X} x_e$$

Cada subconjunto $S \in \mathcal{C}$ deve conter pelo menos um de seus elementos em T, o que pode ser formulado da seguinte forma:

$$\sum_{e \in S} x_e \geq 1$$

Em T, não pode haver dois elementos da mesma cor. Isso pode ser garantido de diferentes maneiras; seguem duas abordagens possíveis:

- *Para cada par de elementos $e_1, e_2 \in X$ que possuam a mesma cor, no máximo um deles pode estar em T:*

$$x_{e_1} + x_{e_2} \leq 1 \quad \forall e_1, e_2 \in X, c(e_1) = c(e_2)$$

- *Para cada cor, no máximo um elemento dessa cor pode estar em T. Se definirmos por Z o conjunto de cores na entrada e por X_z o conjunto de elementos de X com cor $z \in Z$, temos:*

$$\sum_{e \in X_z} x_e \leq 1 \quad z \in Z$$

Desta forma, um possível PLI fica:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{e \in X} x_e \\ \textit{s.a.:} \quad & \sum_{e \in S} x_e \geq 1 \qquad \forall S \in \mathcal{C} \\ & \sum_{e \in X_z} x_e \leq 1 \qquad \forall z \in Z \\ & x_e \in \{0,1\} \forall e \in X \end{aligned}$$

(e) ***(0.5 pt)*** *Considere a seguinte instância para a versão de otimização do problema da $TRANSVERSAL\_COLORIDA$:*

$$X = \{1,2,3,4,5\},\ \mathcal{C} = \{\{1,2,3\},\{2,3,4\},\{1,5\}\},\ c(i) = \begin{cases} \textit{vermelho, se } i \textit{ for par} \\ \textit{verde, se } i = 3 \\ \textit{azul, em outro caso} \end{cases}$$

Escreva o PLI do item anterior para ela.

Resposta.

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \\ \textit{s.a.:} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \geq 1 \\ & x_2 + x_3 + x_4 \geq 1 \\ & x_1 + x_5 \geq 1 \\ & x_2 + x_4 \leq 1 \qquad (\textit{vermelho}) \\ & x_3 \leq 1 \qquad (\textit{verde}) \\ & x_1 + x_5 \leq 1 \qquad (\textit{azul}) \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \{0,1\} \end{aligned}$$

(f) ***(1.5 pt)*** *A relaxação linear de um PLI é, essencialmente, a mesma formulação original, mas sem a restrição de integralidade das variáveis. Em outras palavras, trata-se de um Programa Linear (PL) que mantém as mesmas variáveis, função objetivo e restrições. As variáveis continuam respeitando seus limites inferiores e superiores; a única diferença é que elas deixam de ser inteiras e passam a assumir valores racionais. Escreva a relaxação linear do PLI para a instância do item anterior e o dual dessa relaxação.*

Resposta. *Ao relaxarmos as variáveis binárias x_i, devemos manter o limite, portanto, as restrições $x_i \leq 1$ e $x_i \geq 0$ deveriam ser adicionadas. No entanto, em nossa formulação, as restrições que impedem a repetição de cores já garantem que $x_i \leq 1$, logo, não será necessário adicionar as restrições de limitante superior 1.*

Relaxação linear (em forma padrão):

$$\begin{array}{ll} \max & -x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 \\ s.a.: & -x_1 - x_2 - x_3 \leq -1 \\ & -x_2 - x_3 - x_4 \leq -1 \\ & -x_1 - x_5 \leq -1 \\ & x_2 + x_4 \leq 1 \\ & x_3 \leq 1 \\ & x_1 + x_5 \leq 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

Dual:

$$\begin{array}{ll} \min & -y_1 - y_2 - y_3 + y_4 + y_5 + y_6 \\ s.a.: & -y_1 - y_3 + y_6 \geq -1 \\ & -y_1 - y_2 + y_4 \geq -1 \\ & -y_1 - y_2 + y_5 \geq -1 \\ & -y_2 + y_4 \geq -1 \\ & -y_3 + y_6 \geq -1 \\ & y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6 \geq 0 \end{array}$$

(g) ***(1.0 pt)*** *É fácil ver que $\{1, 4\}$ é uma solução ótima da instância no item **(e)**, quais seriam os valores das variáveis na sua formulação? Essa solução também é ótima para a relaxação linear no item **(f)**? Prove a sua resposta usando os teoremas vistos em aula.*

Resposta. *No PLI essa solução seria:*

$$x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0$$

Usemos folgas complementares para verificar se essa solução é ótima para a nossa relaxação.

O teorema das folgas complementares afirma que, se x^* é ótima para o problema primal e y^* é ótima para o problema dual, então:

$$(b - A \cdot x^*)y^* = 0 \text{ e } (c - A \cdot y^*)x^* = 0$$

Ou seja, nas linhas em que $b - a \cdot x^* \neq 0$*, o valor de* y^* *associado deve ser* 0*. Vamos identificar quais são essas linhas no nosso problema primal para a solução dada:*

$$
\begin{array}{ll}
-1 - (-x_1 - x_2 - x_3) = -1 - (-1 - 0 - 0) = 0 & (y_1 \geq 0) \\
-1 - (-x_2 - x_3 - x_4) = -1 - (-0 - 0 - 1) = 0 & (y_2 \geq 0) \\
-1 - (-x_1 - x_5) = -1 - (-1 - 0) = 0 & (y_3 \geq 0) \\
1 - (x_2 + X_4) = 1 - (0 + 1) = 0 & (y_4 \geq 0) \\
1 - (x_3) = 1 - 0 \neq 0 & (y_5 = 0) \\
1 - (x_1 + x_5) = 1 - (1 + 0) = 0 & (y_6 \geq 0)
\end{array}
$$

Somente uma das linhas não ficou zero. Portanto, a variável dual associada a essa linha é a única que permanece com valor diferente de zero.

De forma análoga, o teorema das folgas complementares implica que os valores distintos de zero na solução primal correspondem a linhas no problema dual em que $c - A \cdot y^* = 0$ *(ou seja, restrições que devem ser satisfeitas como igualdade). Assim, no dual, temos:*

$$
\begin{aligned}
-y_1 - y_3 + y_6 &= -1 \\
-y_1 - y_2 + y_4 &\geq -1 \\
-y_1 - y_2 + 0 &\geq -1 \\
-y_2 + y_4 &= -1 \\
-y_3 + y_6 &\geq -1
\end{aligned}
$$

Note que $-y_2 + y_4 = -1$ *e* $-y_1 - y_2 + y_4 \geq -1$*, implicam em* $y_1 = 0$*. Pelo que essas restrições ficam:*

$$
\begin{aligned}
-y_3 + y_6 &= -1 \\
-y_2 &\geq -1 \\
-y_2 + y_4 &= -1
\end{aligned}
$$

O sistema anterior possui várias (infinitas) soluções viáveis, bastando que $y_6 = y_3 - 1$ *e* $y_4 = y_2 - 1$*, com a restrição de que* $y_2 \geq 1$*.*

Para verificar se a solução dada é ótima para o primal, podemos recorrer agora aos teoremas da dualidade. A dualidade fraca nos diz que, para quaisquer soluções viáveis x *do primal e* y *do dual, a seguinte relação é sempre verdadeira:*

$$c^T \cdot x \leq b^T \cdot y$$

Ou seja, o valor objetivo do primal é sempre menor ou igual ao do dual. Portanto, se uma solução viável do primal tiver o mesmo valor na função objetivo que uma solução viável do dual, ambas devem ser ótimas.

O valor da função objetivo para qualquer solução viável do sistema obtido a partir do dual é dado por:

$$-y_1 - y_2 - y_3 + y_4 + y_5 + y_6 = -0 - y_2 - y_3 + 0 + (y_2 - 1) + (y_3 - 1) = -2$$

Que coincide com o valor da função objetivo do primal:

$$-x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = -1 + 0 + 0 - 1 + 0 = -2$$

Portanto, a solução proposta é ótima para a relaxação linear.

(h) ***(1.5 pt)*** *Dois colegas de sala, Sabin Ada e Sabit Udo, afirmam ter solucionado, de forma independente, o problema* P *v.s* NP*. Para tal, eles estudaram a linguagem* $TRANSVERSAL$ *e a sua relação com a seguinte linguagem:*

$$CLIQUE\_13000\,\{\langle G\rangle \mid G \textit{ é um grafo com uma clique de tamanho } 13000\}$$

- *Sabin Ada diz que não é possível decidir* $CLIQUE\_13000$ *polinomialmente e que há uma redução polinomial de* $CLIQUE\_13000$ *para* $TRANSVERSAL$*.*
- *Sabit Udo diz que* $CLIQUE\_13000$ *pode ser solucionado em tempo polinomial e que existe uma redução polinomial de* $TRANSVERSAL$ *para* $CLIQUE\_13000$*.*

Responda, justificando em cada caso:

(h.1) *Se as afirmações de Sabin Ada fossem verdade, o que se pode concluir?*

Resposta. *Suponha que* $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$*. Nesse caso, o problema* $TRANSVERSAL$ *poderia ser decidido em tempo polinomial, pois, como vimos em itens anteriores, ele está em* NP*. Além disso, como o problema* $CLIQUE_13000$ *pode ser reduzido em tempo polinomial para* $TRANSVERSAL$*, isso implicaria que* $CLIQUE_13000$ *também poderia ser decidido em tempo polinomial, o que contradiz uma das afirmações de Sabin Ada. Portanto, nossa suposição está incorreta, e, se as afirmações de Sabin Ada fossem verdadeiras, então teríamos* $\mathsf{P} \neq \mathsf{NP}$*.*

(h.2) *Se as afirmações de Sabit Udo fossem verdade, o que se pode concluir?*

Resposta. *Como existe uma redução polinomial de* $TRANSVERSAL$ *para* $CLIQUE_13000$ *e* $TRANSVERSAL$ *é* NP*-difícil, podemos concluir que* $CLIQUE_13000$ *também é* NP*-difícil. Além disso, como temos um algoritmo polinomial para um problema* NP*-difícil, podemos concluir que, se as afirmações de Sabit Udo fossem verdadeiras, então* $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$*.*

(h.3) *Identifique qual dos dois está garantidamente errado.*

Resposta. *Sabin Ada está claramente errado. Para demonstrar isso, mostraremos que o problema* $CLIQUE_13000$ *pode ser decidido em tempo polinomial pelo seguinte algoritmo:*

- *$A(\langle G = (V, e)\rangle)$:*

1 *Se $|V| < 13000$, então devolva* ***0***
2 *Para cada conjunto $C \subseteq V$ com exatamente 13000 vértices, faça:*
3 *Se todo par de vértices de C for adjacente em G, então devolva* ***1***
4 *Devolda* ***0***

Primeiro, vejamos que o algoritmo é correto:

*Se G possui uma clique de tamanho 13000, o algoritmo anterior retorna 1. Note que, se G possui tal clique, então deve ter pelo menos 13000 vértices, e $A(G)$ não retorna 0 na primeira linha. Além disso, essa clique é formada por um subconjunto de 13000 vértices, C, gerado em alguma das iterações da linha **2**, e, como são vértices de uma clique, todos são adjacentes entre si. Assim, na linha **3**, o algoritmo retorna 1.*

*No sentido inverso, se o algoritmo retorna 1, isso significa que G possui 13000 vértices todos adjacentes entre si (conforme linhas **2** e **3**). Ou seja, G possui uma clique de tamanho 13000.*

Existem $\binom{n}{13000} = O(n^{13000})$ subconjuntos de 13000 vértices em um grafo com n vértices, e verificar se cada par de vértices em um conjunto de 13000 é adjacente pode ser feito em $O(13000^2)$. Portanto, a complexidade do algoritmo proposto é $O(n^{13000})$, que é polinomial no número de vértices.

Linguagens que pode assumir são NP*-completas:*

- $CIRCUIT\_SAT = \{\langle C\rangle \mid C$ *é um circuito combinatorial satisfazível*$\}$.[1]
- $SAT = \{\langle \psi\rangle \mid \psi$ *é uma fórmula booleana satisfazível*$\}$.[2]
- 3-$SAT = \{\langle \psi\rangle \mid \psi$ *é uma fórmula booleana satisfazível em forma normal conjuntiva com três literais por clausula*$\}$.[3]
- $PARTICAO = \{\langle S, k\rangle \mid S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ *e existe* $X \subseteq S$ *tal que* $|X| = k$ *e* $\sum_{x \in X} x = k\}$.
- $HAMILTONIANO = \{\langle G\rangle \mid G$ *é um grafo com um ciclo Hamiltoniano*$\}$.[4]
- $CLIQUE = \{\langle G, k\rangle \mid G$ *é um grafo com uma clique de* k *vértices*$\}$. [5]

[1]Circuito satisfazível: que existe uma atribuição nos fios de entrada, cuja saída é 1
[2]Fórmula satisfazível: que existe uma atribuição nas variáveis que faz a fórmula verdadeira
[3]Forma normal conjuntiva: formula composta por conjunção de cláusulas em que cada cláusula é uma disjunção de literais.
[4]Ciclo Hamiltoniano: que passa por todos os vértices do grafo.
[5]Clique: subgrafo completo.

- $INDEPENDENTE = \{\langle G, k\rangle \mid G$ *é um grafo com um conjunto independente de* k *vértices*$\}$.[6]
- $DOMINANTE = \{\langle G, k\rangle \mid G$ *é um grafo com um conjunto dominante de* k *vértices*$\}$.[7]
- $COBERTURA\_VERTICES = \{\langle G, k\rangle \mid G$ *é um grafo com uma cobertura por vértices de tamanho* $k\}$.[8]
- $COBERTURA\_CONJUNTOS = \{\langle X, \mathcal{S}, k\rangle \mid X$ *é um conjunto de elementos,* $\mathcal{S}$ *uma coleção de subconjuntos de* X *e existe uma cobertura* $Y \subseteq \mathcal{S}$ *de* X*, com* $|Y| = k\}$.[9]

[6]Independente: que não tem dois vértices adjacentes.
[7]Dominante: que todo vértice fora do conjunto tem pelo menos um adjacente no conjunto.
[8]Cobertura de vértices: conjunto de vértices que cada aresta do grafo tem pelo menos um extremo no conjunto.
[9]Cobertura de conjunto: coleção de conjuntos cuja união são todos os elementos.