Prof. Santiago V. Ravelo

Lista de exercícios 01 - Conceitos sobre grafos

Os seguintes exercícios são para aprofundar no estudo da matéria.

1. Sejam G um grafo e u, v vértices de G. Mostre que se existe um passeio de u a v em G, então existe um caminho de u a v em G.

2. Sejam G um grafo e u, v, w vértices de G. Mostre que se em G existem um caminho de u a v e um caminho de v a w então existe um caminho de u a w em G.

3. Solucione o problema das 7 pontes de Königsberg.. Para isso primeiro obtenha os seguintes resultados:

(a) Sejam G um grafo e $P = (v_0, \ldots, v_k)$ um passeio em G que não repete arestas. Mostre que se um vértice u aparece em P e $u \notin \{v_0, v_k\}$, então o número de arestas diferentes de P que incidem em u é par.

(b) Seja G um grafo. Mostre que se existe um passeio que passa por todas as arestas sem repeti-las, então no máximo há dois vértices de grau ímpar em G.

4. Prove que todo grafo conexo contém uma árvore geradora.

5. Prove que se G é um grafo conexo, C um ciclo de G e $e = (u, v)$ uma aresta de C, então $G - e$ é conexo.

6. Dado um grafo conexo G e uma aresta $e = (u, v)$ de G, prove que se $G - e$ é conexo, então e pertence a algum ciclo de G.

7. Prove que toda árvore $T = (V, E)$ é um grafo bipartido.

8. Demonstre ou dê contraexemplo:

(a) Todo passeio fechado contém um ciclo.

(b) Uma **rota** é um passeio fechado com pelo menos uma aresta e que não tem repetição de arestas. Toda rota contém um ciclo.

(c) Se o grau mínimo de um grafo G é $d > 1$, então em G existe um caminho de comprimento pelo menos d.

(d) Se o grau mínimo de um grafo G é $d > 1$, então em G existe um ciclo de comprimento pelo menos $d + 1$.

(e) Um grafo G com n vértices é uma árvore se e somente se for acíclico e tiver $n - 1$ arestas.

(f) Um grafo G é uma árvore se e somente se G for acíclico maximal (ou seja, G é acíclico e a adição de qualquer aresta cria um ciclo).

(g) Se em um grafo G todos os vértices tem grau no conjunto $\{1, 2\}$ e há exatamente dois vértices com grau 1, então G é exatamente um caminho.

(h) Um grafo bipartido com n vértices tem no máximo $\frac{n^2}{4}$ arestas.

(i) Todo grafo acíclico que possua k componentes e pelo menos dois vértices por componente, possui pelo menos $2k$ vértices de grau 1.

(j) Não existe um grafo com 11 vértices, onde os graus sejam: 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 5, 5 e 6.

(k) É possível formar uma “linha” com as 28 peças do jogo de dominó de 6, nesse jogo cada peça é uma dupla $\{i, j\}$ com $i, j \in \{0, 1, 2, \ldots, 6\}$. Note que, para formar uma linha, é permitido “encostar” uma peça $\{i, j\}$ numa peça $\{j, k\}$ de forma a produzir a sequência (i, j, j, k), com $i, j, k \in \{0, 1, \ldots, 6\}$.

(l) É possível formar uma “linha” com as 55 peças do jogo de dominó de 9, nesse jogo cada peça é uma dupla $\{i, j\}$ com $i, j \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Note que, para formar uma linha, é permitido “encostar” uma peça $\{i, j\}$ numa peça $\{j, k\}$ de forma a produzir a sequência (i, j, j, k), com $i, j, k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$.

(m) Qualquer grafo conexo com 20 vértices tem pelo menos 20 arestas.

(n) Para quaisquer inteiros $n > m \geq 0$, não é possível existir um grafo com $2n + 1$ vértices onde cada vértice tem $2m + 1$ vizinhos.

(o) Existe um passeio que passe uma vez por cada aresta de um grafo completo com 10 vértices.

9. Considere um grafo $G = (V, E)$. Demonstre que as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) G é uma árvore.

(b) G é conexo e possui exatamente $|V| - 1$ arestas.

(c) G é conexo e a remoção de qualquer aresta desconecta o grafo.

(d) Para todo par de vértices u, v de G, existe um único caminho de u a v em G.

10. Prove que todo grafo conexo $G = (V, E)$, com $|V| \geq 2$, tem um vértice cuja remoção mantém o grafo resultante conexo.

11. Circule C para afirmações corretas e E para incorretas. Justifique em cada caso.

(a) Seja G um grafo e u, v, w vértices de G. Se existe aresta com extremos u e v e uma aresta com extremos v e w, então existe uma aresta com extremos u e w.

(b) Seja G um grafo e u, v, w vértices de G. Se não existe caminho com extremos u e w, então o número de arestas no grafo induzido por u, v e w é no máximo 1.

(c) Se G é um grafo bipartido, então existe uma ordenação dos vértices tal que a representação por matriz de adjacência é da forma $\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$.

(d) Todo grafo tem um número par de vértices ímpares, i.e., com grau ímpar.

(e) Todo grafo tem um número ímpar de vértices pares, i.e., com grau par.

(f) Existem grafos que contêm passeios fechados e são acíclicos, isso é, são florestas.

(g) Todo grafo que contém um passeio fechado *sem repetição de arestas* é cíclico.

(h) Seja G um grafo simples qualquer com 10 vértices. O número de arestas de G somado ao número de arestas do complementar $\overline{G}$ é 45.

(i) Dado um grafo G, se o menor caminho entre u e v tem tamanho exatamente 2, então existe uma aresta que liga u a v em $\overline{G}$.

(j) T é uma árvore se e somente se contém $|V| - 1$ arestas.

(k) Se em um grafo simples conexo todo vértice tem grau dois, então esse grafo é um ciclo.

(l) Dada uma árvore T, existe um subconjunto de vértices $X \subseteq V(T)$ tal que $G = T - X$ tem pelo menos $V(T)/2$ vértices com grau zero.

(m) Todo grafo com um número ímpar de vértices é bipartido.

(n) Como toda árvore T é um grafo bipartido, então ao adicionar uma aresta qualquer T o grafo continua bipartido.

12. Um k-**cubo** é um grafo cujos vértices são todas as sequências $b_1 b_2 \ldots b_k$ em que cada b_i pertence a $\{0, 1\}$. Em um k-cubo, dois vértices são adjacentes se diferem em exatamente uma posição. Quantas arestas tem o k-cubo? Prove que um k-cubo é bipartido.

13. Uma **grade** p**-por-**q é um grafo cujo conjunto de vértices é o produto cartesiano $\{1, 2 \ldots, p\} \times \{1, 2, \ldots, q\}$ e dois vértices (i, j) e (i', j') são adjacentes se: $|i - i'| = 1$ e $j = j'$, ou $i = i'$ e $|j - j'| = 1$. Quantas arestas tem a grade p-por-q? Mostre que a grade p-por-q é um grafo bipartido.

14. O **diâmetro** de um grafo G é a maior distância entres dois vértices de G. O **raio** é a a menor excentricidade. Onde, a excentricidade de um vértice u é a distância entre u e o vértice mais longe. Isto é:

$$diam(G) = \max_{u,v \in V} \ dist(u, v), \quad raio(G) = \min_{u \in V} \ exce(u), \quad exce(u) = \max_{v \in V} \ dist(u, v).$$

(a) Todo grafo G satisfaz que $raio(G) \leq diam(G) \leq 2 \cdot raio(G)$.

(b) Seja G um grafo simples de diâmetro maior ou igual que três. Mostre que $\overline{G}$ tem diâmetro no máximo três.

(c) Seja T uma árvore com pelo menos uma aresta de diâmetro d. Suponha que após a remoção de uma aresta, obtemos duas componentes conexas T_1 e T_2 com diâmetro d_1 e d_2, respectivamente. Mostre que $d \geq (d_1 + d_2)/2 + 1$.