Lista de exercícios 10 - Programação linear, reduções, NP-complexidade

Os seguintes exercícios são para aprofundar no estudo da matéria.

1. Desenhe o politopo para o seguinte PL. Usando o desenho, descubra o valor ótimo do programa:

$$\begin{array}{rr} \min & 7x + 3y \\ \text{s.a} & 2x + 3y \leq 20 \\ & 3x - 6y \leq -12 \\ & y \geq 1 \\ & 2x + 3y \geq 10 \end{array}$$

2. Um moinho fabrica comida para gado, ovelhas e galinhas. Isso é feito misturando-se os seguintes ingredientes: milho, calcário, soja, e ração de peixe. Estes ingredientes contêm os seguintes nutrientes: vitaminas, proteína, cálcio e gordura. Os ingredientes dos nutrientes em cada quilo estão indicados na tabela abaixo.

	Nutrientes			
Ingrediente	Vitaminas	Proteína	Cálcio	Gordura
Milho	8	10	6	8
Calcário	6	5	10	6
Soja	10	12	6	6
Ração de peixe	4	8	6	9

O moinho é contratado para produzir 10, 6 e 8 toneladas de comida para gado, ovelhas e galinhas. Ele tem a sua disposição 6 toneladas de milho, 10 toneladas de calcário, 4 toneladas de soja e 5 toneladas de ração de peixe. O preço por quilo desses ingredientes é respectivamente R$20, R$12, R$24 e R$12. As quantidades mínima e máxima permitidas dos nutrientes em um quilo de comida para gado, ovelhas e galinhas estão indicadas abaixo.

	Nutrientes							
	Vitaminas		Proteína		Cálcio		Gordura	
Comida p/	Min	Max	Min	Max	Min	Max	Min	Max
Gado	6	∞	6	∞	7	∞	4	8
Ovelhas	6	∞	6	∞	6	∞	4	6
Galinhas	4	6	6	∞	6	∞	4	6

Formule este problema como um programa linear que minimiza o custo total de produção.

3. Uma fábrica de aço produz quatro tamanhos de perfil I (*"I-beam"*, consulte a Wikipedia!): pequeno, médio, grande e extragrande. Esses perfis podem ser produzidas por qualquer das máquinas A, B e C. Os comprimentos em metros de perfil I que podem ser produzidas nas máquinas em uma hora estão indicadas abaixo.

Beam	A	B	C
pequeno	300	600	800
médio	250	400	700
grande	200	350	600
extragrande	100	200	300

Suponha que cada máquina pode ser usada até 50 horas por semana e que os custos de operação (por hora) das máquinas são respectivamente R\$30, R\$50 e R\$80. Suponha ainda que 10.000, 8.000, 6.000 e 6.000 metros dos diferentes tipos de I beams são requisitados por semana. Formule o problema de escalonar as máquinas de modo a minimizar o custo total de produção como um programa linear.

4. Uma companhia está planejando a manufatura de 3 produtos em quatro máquinas. Cada produto pode ser manufaturado em qualquer das máquinas. Os custo de produção por unidade estão indicados na tabela:

	Máquinas			
Produto	1	2	3	4
1	4	4	5	7
2	6	7	5	6
3	12	10	8	11

Os tempos em horas necessário para produzir cada unidade de um produto em cada máquina estão indicados abaixo.

	Máquinas			
Produto	1	2	3	4
1	0,3	0,25	0,2	0,2
2	0,2	0,3	0,2	0,25
3	0,8	0,6	0,6	0,5

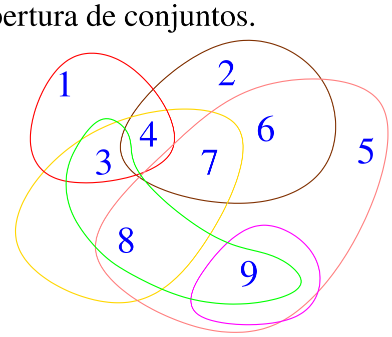
Suponha que $4000, 5000$ e 3000 unidades dos produtos são exigidos e que os tempos em horas disponíveis para cada máquina são $1500, 1200, 1500$ e 2000, respectivamente. Formule o problema como um programa linear visando minimizar o custo total.

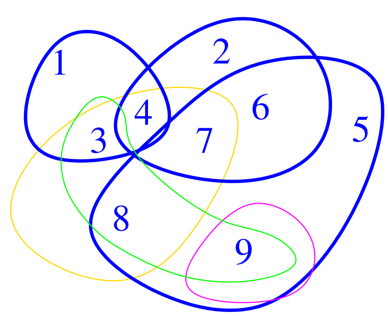
5. Considere a seguinte formulação para o problema do caminho mínimo:

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \min & \sum_{e\in E} w_e x_e \\ \text{s.a.} & \begin{cases} \sum_{e\in\delta^+(v)} x_e - \sum_{e\in\delta^-(v)} x_e = 0 & \forall v \in V \setminus \{s,t\} \\ \sum_{e\in\delta^+(s)} x_e = 1 & \\ \sum_{e\in\delta^-(t)} x_e = 1 & \\ 0 \le x_e \le 1 & \forall e \in E \setminus (\delta^-(s) \cup \delta^+(t)) \\ 0 \le x_e \le 0 & \forall e \in \delta^-(s) \cup \delta^+(t) \end{cases} \end{array}$$

Mostre que o poliedro associado a essa formulação é inteiro.

6. *Problema da Cobertura por Conjuntos* Considere um conjunto de elementos E e uma família de conjuntos $\mathcal{S}$ de E. Uma cobertura de E é uma coleção de conjuntos $S \subseteq \mathcal{S}$ cuja a união é E, ou seja, $\bigcup_{X\in S} X = E$. Na figura à esquerda há um exemplo de elementos e família de conjuntos e na figura à direita há uma cobertura de conjuntos.





No problema da cobertura por conjuntos mínima, são dados dados E, $\mathcal{S}$ e uma função de custo $c : \mathcal{S} \to \mathbb{Q}$ (dizemos que $c(X)$ é o custo do conjunto X). O objetivo é encontrar uma cobertura por conjuntos S que minimiza

$$\sum_{X \in S} c(X).$$

Formule o problema como um *programa linear inteiro* (PLI).

(a) Descreva cada variável de decisão do PLI: qual o domínio e o que representa.

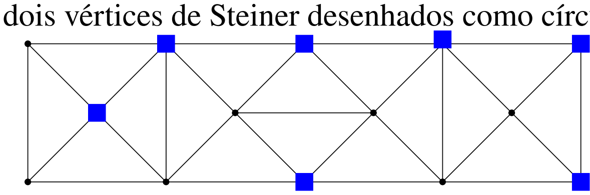
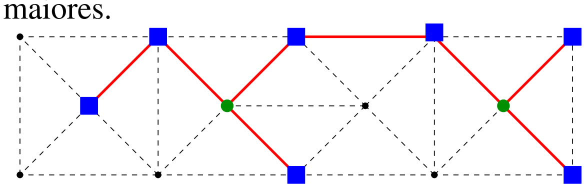
(b) Escreva a formulação e explique sucintamente porque a formulação está correta.

7. Suponha que você tem um problema e deseja escrevê-lo como um programa linear inteiro. Dê estratégias para representar as seguintes decisões a serem tomadas utilizando variáveis de sua formulação.

(a) Uma variável de decisão é x, que é um número racional (possivelmente fracionário) e representa a vasão de água em um tubo de distribuição. Para evitar contaminação dá água devida à baixa pressão, a variável x só pode assumir valor 0 (quando não passa água pelo tubo), ou valores acima de uma constante K. Como você poderia restringir essa variável?

(b) Um atacadista tem um sistema de vendas em que quanto mais se compra, maior a taxa de desconto. Entre as regras, existem m níveis $b_1 < b_2 < \cdots < b_m$. Se x representa a taxa de desconto fornecida e foram vendidos t itens, então o desconto permitido é de no máximo $x \leq b_t$; se forem vendidos mais de m itens, o desconto é de no máximo b_m. Como você pode restringir as variáveis t e x?

8. *Problema da Árvore Steiner* Considere um grafo conexo $G = (V, E)$ com pesos nas arestas $w : E \to \mathbb{Q}_{\geq 0}$ e um conjunto de vértices R, que são chamados de *terminais*. Uma árvore de Steiner é uma árvore T que é subgrafo de G e contém todos os terminais. Note que T pode conter vértices que não são terminais; esses vértices são chamados de *vértices de Steiner*. Na primeira figura, os terminais estão desenhados como quadrados; a segunda figura contém uma árvore de Steiner do primeiro grafo em que há dois vértices de Steiner desenhados como círculos maiores.

No problema da Árvore de Steiner, dados G, w e R, queremos encontrar uma árvore de Steiner T que minimiza

$$w(T) := \sum_{e \in E[T]} w(e).$$

Repare que o problema da árvore de Steiner corresponde ao problema da árvore geradora mínima (AGM) no caso particular em que $R = V$; no entanto, ao contrário de AGM, não conhecemos um algoritmo polinomial para esse problema.

(a) Ana, estudante de Computação sugeriu resolver o problema formulando-o como um problema de fluxo de custo mínimo (FCM). Ela argumentou: "Comece substituindo cada aresta do grafo por arestas antiparalelas; em seguida, escolha um terminal arbitrário $r \in R$ e suponha que r é um *produtor* que produz $|R| - 1$ itens diariamente; finalmente, suponha que cada outro terminal $t \in R \setminus \{r\}$ é um consumidor com demanda de 1 item por dia. Agora, resolva a instância de FCM criada; uma solução vai induzir uma árvore de Steiner mínima." A solução de Ana está correta? Justifique.

(b) Formule o problema como um programa linear inteiro (PLI) e mostre que a redução está correta, i.e., mostre que se T é uma árvore de Steiner, então existe uma solução viável do PLI com valor $w(T)$ e, vice-versa, se existe uma solução do PLI com valor v^*, então existe uma árvore de Steiner com valor v^*.

9. Considere uma rede G em que toda aresta tem capacidade unitária. O teorema do fluxo máximo e corte mínimo afirma que o valor do fluxo de maior valor é igual à capacidade do corte de menor capacidade. Demonstre novamente esse teorema para a rede G, mas dessa vez utilize resultados de programação linear. Para isso, formule ambos problemas como programas lineares inteiros, argumente que as relaxações dos PLIs são integrais e utilize o teorema da dualidade.

10. Uma agência de planejamento governamental quer determinar as fontes de combustível para uso de n galpões entre m empresas que oferecem o serviço. A quantidade máxima oferecida pela empresa i é a_i litros e a demanda do galpão j é de b_j litros.

Devido a restrições financeiras, *no máximo* C das m empresas podem ser contratadas para fornecer combustível, i.e., se uma empresa não for contratada, então não se pode obter combustível dessa empresa.

Seja c_{ij} uma constante que representa o custo de transporte por unidade da empresa i para o galpão j.

Formule o problema de minimizar o custo total de compra pela agência como um *programa linear inteiro* (PLI).

(a) Descreva cada variável de decisão do PLI: qual o domínio e o que representa.

(b) Escreva a formulação e explique sucintamente porque a formulação está correta.

11. Sejam P_1 e P_2 dois problemas tais que $P_1 \preccurlyeq_n P_2$ e suponha que P_1 tem cota inferior $\Omega(n \log n)$, onde n é um parâmetro que mede o tamanho da entrada do problema P_1. Quais das seguintes afirmações são verdadeiras? Justifique cuidadosamente as suas respostas.

(a) $\Omega(n \log n)$ também é cota inferior para P_2.

(b) Todo algoritmo que resolve P_1 também pode ser usado para resolver P_2.

(c) Todo algoritmo que resolve P_2 também pode ser usado para resolver P_1.

(d) O problema P_2 pode ser resolvido no pior caso em tempo $O(n \log n)$.

12. Sejam P_1 e P_2 dois problemas tais que um deles tenha cota inferior $\Omega(n^k)$, para algum $k > 1$, e o outro é solúvel em tempo $O(n \log n)$. Se P_1 é redutível a P_2 em tempo linear, diga qual é qual. O parâmetro n denota o tamanho da entrada dos dois problemas.

13. Sejam A e B dois problemas tais que $A \preccurlyeq_{n \log n} B$ e suponha que A tem cota inferior $\Omega(n^{3/2})$, onde n é um parâmetro que mede o tamanho de uma instância I_A de A. Suponha que dada I_A, a redução obtém uma instância I_B de B. Quais das seguintes afirmações são verdadeiras? Justifique.

(a) A notação $A \preccurlyeq B$ significa que o pior algoritmo para A é mais rápido que o melhor algoritmo para B.

(b) Se existe algoritmo $O(n^{3/2})$ para B, então o problema A pode ser resolvido em tempo $O(n \log n)$.

(c) Se a instância I_B tem tamanho $\Theta(n)$, então $\Omega(n^{3/2})$ também é cota inferior para B.

(d) Se não existe um algoritmo que resolve A, então também não existe um algoritmo que resolve B.

(e) Se existe um algoritmo que resolve A, então também existe um algoritmo que resolve B.

14. Responda verdadeiro ou falso. Justifique em cada caso via prova ou contraexemplo.

(a) Se existe problema $L \in \mathsf{NP}$ tal que $L \notin \mathsf{NP}$-completo, então para todo $L' \in \mathsf{NP}$-completo, não existe redução $L' \preccurlyeq_p L$.

(b) Qualquer linguagem pertencente a NPpode ser decidida por um algoritmo em tempo $2^{O(n^k)}$, para alguma constante k.

(c) Se NP $\neq$ co-NP, então P $\neq$ NP.

(d) Se $L_1 \preccurlyeq_p L_2$ e $L_2 \preccurlyeq_p L_3$ então $L_1 \preccurlyeq_p L_3$.

(e) $L \preccurlyeq_p \overline{L}$ se e somente se $\overline{L} \preccurlyeq_p L$.

15. Um ciclo de um grafo é Hamiltoniano se passar por todos os vértices do grafo. Analogamente, um caminho que passa por todos os vértices é Hamiltoniano:

(a) Considerando que é NP-completo o problema de decidir se um grafo tem um caminho Hamiltoniano, mostre que o de decidir se um grafo tem um ciclo Hamiltoniano é também NP-completo.

(b) Considerando que é NP-completo o problema de decidir se um grafo tem um ciclo Hamiltoniano, mostre que o de decidir se um grafo tem um caminho Hamiltoniano é também NP-completo.

16. Uma clique de tamanho é um subgrafo completo de um grafo G, Um conjunto independente é um conjunto de vértices no qual não há dois vértices adjacentes:

(a) Considerando que é NP-completo o problema de decidir se um grafo tem uma clique com pelo menos C vértices, mostre que o de decidir se um grafo tem um conjunto independente com pelo menos I vértices é também NP-completo.

(b) Considerando que é NP-completo o problema de decidir se um grafo tem um conjunto independente com pelo menos I vértices, mostre que o de decidir se um grafo tem uma clique com pelo menos C vértices é também NP-completo.

17. Uma cobertura de vértices de um grafo é um subconjunto S dos vértices no qual toda aresta tem pelo menos um extremo em S. Mostre que o problema de decidir se um grafo tem uma cobertura de vértices de tamanho no máximo k é NP-completo.

18. Um conjunto dominante de um grafo é um subconjunto S dos vértices no qual todo vértice que esteja fora de S tem pelo menos um adjacente em S. Mostre que o problema de decidir se um grafo tem um conjunto dominante de tamanho no máximo k é NP-completo.

19. Dada uma sequência de números positivos $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ e um número $b > 0$, é NP-completo decidir se existe um subconjunto dos índices $X \subseteq \{1, , n\}$ tal que $\sum_{i \in X} s_i = b$. A partir desse problema, mostre que as seguintes variantes também são NP-completos:

(a) Dada uma sequência de números positivos $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$, decidir se existe um subconjunto dos índices $X \subseteq \{1, , n\}$ tal que $\sum_{i \in X} s_i = \sum_{i \notin X} s_i$.

(b) Dada uma sequência de números $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$, decidir se existe um subconjunto não vazio dos índices $X \subseteq \{1, , n\}$ tal que $\sum_{i \in X} s_i = 0$.

20. Considere o problema para decidir se um número p é primo. Mostre que esse problema está em co-NP. Atente-se para o tamanho da codificação de um número p.

21. Dado um conjunto de elementos $E = \{1, 2, ..., n\}$ e uma família de conjuntos $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, ..., S_m\}$, onde $S_i \subseteq E$, uma cobertura de conjuntos é uma subfamília $F \subseteq \mathcal{S}$ tal que $\bigcup_{S \in F} S = E$. O problema da cobertura por conjuntos é: dados E, $\mathcal{S}$ e k, existe uma cobertura de conjuntos F de tamanho $|F| \leq k$? Mostre que cobertura por conjuntos é NP-completo.

22. Considere o problema do empacotamento (BIN). Dado um conjunto finito de n objetos com pesos $w_1, w_2, \ldots, w_n$ inteiros positivos e dois valores inteiros positivos W e k, é possível colocar todos os objetos em k caixas cujo limite máximo de peso é W? Mostre que este problema é NP-completo.

23. Prove que o problema a seguir é NP-completo: dado um grafo $G = (V, E)$ e um inteiro positivo k, determine se G contém uma árvore geradora T tal que todo vértice em T tenha grau no máximo k.