Lista de exercícios 02 - Conceitos sobre grafos e busca em largura

Os seguintes exercícios são para aprofundar no estudo da matéria.

1. Sejam G um digrafo e u, v vértices de G. Mostre que se existe um passeio direcionado de u a v em G, então existe um caminho direcionado de u a v em G.

2. Sejam G um digrafo e u, v, w vértices de G. Mostre que se em G existem um caminho direcionado de u a v e um caminho direcionado de v a w então existe um caminho direcionado de u a w em G.

3. Demonstre ou dê contraexemplo:

(a) Todo passeio direcionado fechado em um digrafo contém um ciclo.

(b) Se o grau mínimo de um grafo G é $d > 1$, então em G existe um caminho de comprimento pelo menos d.

(c) Se o grau de saída mínimo de um digrafo G é $d > 1$, então em G existe um ciclo direcionado de comprimento pelo menos $d + 1$.

(d) Se o grau de entrada mínimo de um digrafo G é $d > 1$, então em G existe um ciclo direcionado de comprimento pelo menos $d + 1$.

(e) Se em um digrafo G todos os vértices tem grau de saída e grau de entrada no conjunto $\{0, 1\}$ e há exatamente um vértice com grau de saída 0 e um vértice com grau de entrada 0, então G é exatamente um caminho direcionado.

(f) Em um digrafo, uma **fonte** é um vértice com grau de entrada 0 e um **sorvedouro** é um vértice com grau de saída 0. Todo digrafo acíclico possui pelo menos uma fonte e um sorvedouro.

(g) Seja G um digrafo e u, v, w vértices de G. Se existe aresta de u para v e uma aresta de v para w, então existe uma aresta de u para w.

(h) Todo digrafo que contém um passeio direcionado fechado *sem repetição de arestas* é cíclico.

4. O transposto do grafo direcionado $G = (V, E)$ é o grafo $G^{\mathrm{T}} = (V, E^{\mathrm{T}})$, em que $E = \{(u, v) \in V \times V : (u, v) \in E\}$. Assim, G^{T} é G com todas as suas arestas invertidas. Descreva algoritmos eficientes para calcular G^{T} a partir de G, para as representações de lista de adjacências e matriz de adjacências de G. Analise os tempos de execução dos seus algoritmos.

5. Seja M uma matriz de adjacência de um grafo $G = (V, E)$ e calcule o quadrado M^2. Dados $u, v \in V$, se existe um caminho de u até v, que valores pode haver em $M^2[u, v]$? Utilize essa informação e dê um algoritmo que calcule o quadrado de um grafo, representado como uma matriz de adjacências, com tempo assintoticamente melhor do que $|V|^3$.

6. Crie um algoritmo que receba um grafo G em forma de lista de adjacências e um conjunto $S \subseteq V$ e crie um novo grafo $G[S]$. Analise a complexidade de seu algoritmo.

7. Exercícios (Livro de texto): 22.2-1, 22.2-2, 22.2-3, 22.2-4, 22.2-5, 22.2-6, 22.2-7, 22.2-8

8. O diâmetro de uma árvore $T = (V, E)$ é definida como $\max_{u,v \in V} \delta(u, v)$, isso é, o mais longo entre todos os caminhos de distância mínima na árvore. Dê um algoritmo eficiente para calcular o diâmetro de uma árvore e analise o tempo de execução de seu algoritmo.

9. Projete um algoritmo para decidir se um dado grafo não direcionado $G = (V, E)$ contém um ciclo de tamanho 4. O tempo de execução de seu algoritmo deve ser $O(V^3)$.

10. Um *ralo universal* em um digrafo $G = (V, E)$ é um sorvedouro com grau de entrada $|V| - 1$ (no qual chega um arco desde cada vértice do grafo). Dada a matriz de adjacências de um digrafo G, projete um algoritmo $O(V)$ para determinar se G possui um ralo universal.