Lista de exercícios 05 - Árvore geradora mínima

Os seguintes exercícios são para aprofundar no estudo da matéria.

1. Prove o Teorema de invariantes visto em aula para o algoritmo de Prim:

"Considere a execução no início do laço principal e defina $S = V \setminus Q$ e $A = \{(u, \pi[u]) : u \in S \setminus \{r\}\}$, então:

1. *A contém arestas de uma árvore T com vértices S e raiz r.*
2. *Para cada $v \in Q$:*
   - *Se $\pi[v] \neq NIL$, então $key[v]$ é o peso da aresta $(v, pi[v])$ que é uma aresta de menor peso ligando v a algum vértice de T.*
   - *Se $\pi[v] = NIL$, então não existe aresta ligando v a algum vértice de T."*

2. Demonstre a correção do algoritmo de Kruskal visto em sala de aula.

3. Suponha que é dado um grafo G com custos nas arestas positivos e diferentes. Seja T uma árvore geradora mínima de G. Agora suponha que substituímos o custo cada aresta, c_e, por seu quadrado, c_e^2, criando assim uma nova instância do problema com o mesmo grafo, mas com custos diferentes. Concorde ou descorde: T ainda deve ser uma árvore geradora mínima para a nova instância. Prove ou dê um contraexemplo.

(a) O que acontece se houver arestas com peso zero?

(b) O que acontece se houver arestas com pesos repetidos?

(c) O que acontece se houver arestas com peso negativo?

4. Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo com pesos associados a cada aresta. O professor B. Smart propôs o seguinte algoritmo para encontrar uma árvore geradora mínima de G.

```
input   : grafo conexo G = (V, E) e função de pesos nas arestas ω
output  : H subgrafo de G.
begin
    Ordene E em ordem não crescente de pesos
    H ← G
    for e ∈ E em ordem não crescente de pesos do
        if H − e é conexo then
            H ← H − e
        end
    end
    return H
end
```

Algorithm 1: SMART-AGM(G, ω).

(a) Argumente sucintamente (em poucas linhas) que o grafo obtido é conexo e acíclico.

(b) Mostre que se e é uma aresta de G com peso máximo e $G - e$ é conexo, então existe uma árvore geradora mínima de G que não contém e.

(c) Usando os resultados dos itens anteriores, mostre que o algoritmo está correto.

5. Seja $G = (V, E)$ um grafo não direcionado com pesos nas arestas e seja F um subgrafo de G que é uma floresta (i.e., F é acíclico). Projete um algoritmo eficiente para encontrar uma árvore geradora em G que contém todas as arestas de F e tem um custo mínimo dentre todas as árvores geradoras que contêm F. Argumente que seu algoritmo está correto e calcule sua complexidade de tempo.

6. Responda as seguintes questões:

(a) Mostre que, se para todo $X \subseteq V$, o corte $\delta(X)$ contém exatamente uma aresta leve, então existe uma única árvore geradora mínima T de G.

(b) Suponha que todas as arestas de G têm custos distintos, com exceção de duas $(u, v), (x, y)$, que têm o mesmo custo. Suponha também que todo caminho de u até x contém essas duas arestas. Argumente que existe uma única árvore geradora mínima. Você pode utilizar o fato enunciado no item anterior.

7. Suponha que desejamos adicionar a operação PRINT-SET(x), para a qual é dado um nó x e que imprime todos os membros do conjunto de x, em qualquer ordem. Mostre como podemos adicionar apenas um único atributo a cada nó em uma floresta de conjuntos disjuntos, de modo que PRINT-SET(x) leve tempo linear no número de membros do conjunto de x e os tempos de execução assintóticos das outras operações sigam inalterados. Suponha que possamos imprimir cada membro do conjunto em tempo $O(1)$.

8. Seja $G = (V, E)$ um grafo não direcionado. Um conjunto $F \subseteq E$ de arestas é chamado conjunto de retroalimentação se cada ciclo de G tiver pelo menos uma aresta em F.

(a) Suponha que G não seja ponderado. Crie um algoritmo eficiente para encontrar um conjunto de retroalimentação de tamanho mínimo.

(b) Suponha que G é um grafo não direcionado com pesos positivos nas arestas. Projete um algoritmo eficiente para encontrar um conjunto de retroalimentação de peso mínimo. Argumente que seu algoritmo está correto.

9. Uma empresa possui n filiais que devem ser conectadas, direta ou indiretamente. Cada par de filiais que são conectadas diretamente utiliza um serviço de fibra ótica, ou um serviço de conexão via linha telefônica. A velocidade da conexão (em MBit/s) via linha telefônica entre duas filiais depende da distância e é fornecida pela empresa de telefonia. A velocidade da fibra é sempre constante, 1GBit/s. Devido a restrições orçamentárias, somente f ($f < n$) conexões via fibra serão contratadas. Uma vez instalada a rede, duas filiais podem ser conectadas (indiretamente) por uma sequência de conexões diretas; *a velocidade de conexão entre as duas filiais* é a velocidade da conexão mais lenta nessa sequência. A velocidade de rede é a menor velocidade de conexão entre quaisquer duas filiais. Escreva um algoritmo para encontrar uma rede com a maior velocidade de rede possível. Argumente por que o algoritmo está correto e analise a complexidade.