Lista de exercícios 06 - Caminhos mínimos

Os seguintes exercícios são para aprofundar no estudo da matéria.

1. Considere um grafo direcionado $G = (V, E)$ cujas arestas têm pesos 0 ou 1. Projete um algoritmo de tempo $O(V + E)$ que obtém uma árvore de caminhos mínimos a partir de um vértice s.

2. Dado um grafo ponderado e direcionado $G = (V, E)$ sem ciclos de peso negativo, seja m o máximo, entre todos os vértices $v \in V$, do número mínimo de arestas em um caminho mínimo da fonte s para v. (Aqui, o caminho mínimo é por peso, e não por número de arestas.) Reescreva o algoritmo Bellman-Ford para ele termine em $m + 1$ passos, mesmo que m não seja conhecido com antecedência.

3. Escreva um algoritmo que verifica se há ciclos negativos em um grafo direcionado e, se houver, devolva um tal ciclo.

4. Em um digrafo ponderado $G = (V, E)$ sem ciclos negativos, a excentricidade de um vértice u é a maior distância de u a qualquer outro vértice: $exce(u) = \max_{v \in V} dist(u, v)$. O raio é a menor excentricidade dentre os vértices de G: $raio(G) = \min_{u \in V} exec(u)$, enquanto o diâmetro é a maior distância entre quaisquer dois vértices: $diam(G) = \max_{u,v \in V} dist(u, v)$. Projete um algoritmo de tempo $O(V^3)$ para encontrar o raio e o diâmetro de um digrafo ponderado sem ciclos negativos. Argumente que seu algoritmo está correto e que a complexidade em tempo é a solicitada.

5. Dado um digrafo ponderado suponha que o peso de um caminho é calculado multiplicando os pesos das arestas ao invés de somando. Responda as seguintes questões:

(a) Argumente o porquê do algoritmo baseado em ordenação topológica funcionar para qualquer digrafo acíclico se os pesos forem positivos. Dê um exemplo do porquê a estratégia do algoritmo não funcionaria quando há pesos negativos.

(b) Argumente o porquê do algoritmo de Dijkstra funcionar para qualquer digrafo se os pesos forem maiores ou iguais que 1. Dê um exemplo do porquê pode não funcionar quando há pesos no intervalo $(0, 1)$.

(c) Argumente o porquê do algoritmo de Bellman-Ford funcionar para qualquer digrafo se os pesos forem positivos e retornar FALSE se houver ciclos (alcançáveis desde a origem) de peso em $(0, 1)$.

6. Milda é a presidenta de um determinado país B. Esse país é dividido em estados e cada estado possui uma capital. Milda quer reestruturar o sistema de estradas e ferrovias e precisa da sua ajuda. As ferrovias são muito antigas e seu custo de manutenção é alto. Seu trabalho é ajudar a presidenta a decidir quais ferrovias podem ser desativadas. No entanto, como B é um país democrático, uma ferrovia só pode ser desativada se isso não piorar a qualidade do sistema de transporte, isso é, uma ferrovia pode ser desativada apenas se a distância de cada cidade à capital mais próxima não for modificada. Considere que o país B tem n cidades e que se uma estrada ou ferrovia liga a cidade i à cidade j, então ela pode ser utilizada para ir tanto de i para j como de j para i. Obtenha um algoritmo eficiente para descobrir quantas ferrovias podem ser desativadas.

7. Considere um tabuleiro de tamanho $m \times n$ onde em cada casa há um número maior ou igual que zero representando o pedágio a pagar se passarmos por aquela casa. Se começarmos no canto superior esquerdo e queremos chegar ao canto inferior direito do tabuleiro, qual seria o trajeto que minimiza o somatório dos pedágios a pagar?

8. Considere um pais em que as cidades estão conectadas por estradas. Se deseja encontrar uma cidade "central", isto é uma cidade que minimiza a distância até a cidade mais longe.

9. Enquanto grafos acíclicos têm propriedades estruturais muito boas, eles são muito restritos. Em algumas aplicações podem aparecer grafos que são "quase" acíclicos. Para uma constante k, um grafo direcionado G é **k-quase-acíclico** se o passeio fechado com maior número de vértices tem no máximo k vértices distintos. (Pense em um valor de k bem pequeno e tente desenhar um exemplo de um grafo k-quase-acíclico. O que você sobe sobre G^{CFC}?).

(a) Seja $G = (V, E)$ um grafo direcionado k-quase-acíclico sem ciclos negativos e s um vértice de G. Projete um algoritmo para encontrar uma árvore de caminhos mínimos a partir de s. Seu algoritmo deve executar em tempo $O(f(k) \cdot E + V)$, onde f é uma função. Você deve descrever o algoritmo em alto nível (i.e., você pode utilizar sub-rotinas conhecidas e ignorar detalhes de implementação).

   Observe que $f(k)$ pode ser muito grande, mas se k for pequeno, então o tempo de execução é dominado por $O(V + E)$. Uma implementação em tempo $\Theta(k^3 \cdot E + V)$ (ou mesmo mais rápida) pode ser encontrada; mas nessa questão basta qualquer algoritmo com a complexidade pedida.

(b) Argumente *brevemente* que o algoritmo acima está correto. Você não precisa ser completamente formal, mas seja claro e não utilize frases ou termos ambíguos. Releia duas vezes. Se tiver dúvida se algum termo é impreciso ou ambíguo, então ele é.