Lista de exercícios 07 - Fluxo em redes

Os seguintes exercícios são para aprofundar no estudo da matéria.

1. Quais das seguintes afirmações são verdadeiras e quais são falsas? Justifique sua resposta apresentado uma prova ou um contra-exemplo.

(a) Se f é um fluxo máximo de uma rede então $f(a) = 0$ ou $f(a) = c(a)$ para toda aresta $a \in E$.

(b) Toda rede possui um fluxo máximo f tal que $f(a) = 0$ ou $f(a) = c(a)$ para toda aresta $a \in E$.

(c) Se todas as arestas têm capacidades diferentes então existe um único corte mínimo.

(d) Suponha que (S, T) é um corte mínimo em uma rede (G, c, s, t). Se multiplicarmos as capacidades de todas as arestas por um número $\lambda > 0$ então (S, T) também é um corte mínimo na nova rede $(D, \lambda c, s, t)$.

(e) Suponha que (S, T) é um corte mínimo em uma rede (G, c, s, t). Se aumentarmos as capacidades de todas as arestas somando um número $\lambda > 0$ então (S, T) também é um corte mínimo na nova rede (D, c', s, t).

2. Seja (G, c, s, t) uma rede de fluxo. Um fluxo inteiro é *par* (*ímpar*, respectivamente) se $f(a)$ é par (ímpar, respectivamente) para toda aresta $a \in E$. Prove ou mostre um contra-exemplo para cada uma das afirmações seguintes.

(a) Se todas as capacidades são inteiros pares, então existe um fluxo máximo que é par.

(b) Se todas as capacidades são inteiros ímpares, então existe um fluxo máximo que é ímpar.

3. Dados vértices s e t em um *grafo direcionado* G, dizemos que uma coleção $P_1, P_2, \ldots, P_k$ de caminhos com início em s e final em t é *aresta-disjunta* se para quaisquer caminhos P_i e P_j, P_i e P_j não têm arestas em comum. Responda as seguintes questões:

(a) Demonstre que, dado um grafo G e vértices s e t, o número máximo de caminhos disjuntos nas arestas de s a t é igual ao número mínimo de arestas necessárias para desconectar s de t.

(b) O problema dos caminhos aresta-disjuntos (CAD) consiste em, dados um grafo G e vértices s e t em G, encontrar uma coleção aresta-disjunta máxima de caminhos de s a t. Mostre como solucionar CAD, usando fluxo máximo.

4. Um emparelhamento perfeito em um grafo bipartido $G = (V, E)$, é um conjunto de arestas $M \subseteq E$ tal que cada vértice em V incide em exatamente uma aresta de M. Seja $G = (V, E)$ um grafo bipartido não direcionado, proponha um algoritmo eficiente para saber se G possui um emparelhamento perfeito.

5. Um certo dia o Rei Artur caprichosamente decidiu que era tempo das donzelas da corte de Camelot se casarem. Na corte havia n donzelas e n cavaleiros. Apesar de Artur ser conhecido como um regente impiedoso, ele não queria casar nenhuma donzela com algum cavaleiro de quem ela não gostasse. Assim, ele pediu a Merlin que arranjasse o casamento de todas as donzelas de modo que isto não ocorresse. Suponha que cada donzela fornece a Merlin uma lista dos cavaleiros com quem ela aceitaria se casar. Como se vê, além de autoritário, o rei Artur era machista e preconceituoso. Mostre como Merlin pode determinar se é possível realizar estes n casamentos forçados.

6. Várias famílias saem juntas para jantar. Para aumentar a interação social,[*] cada pessoa gostaria de se sentar em uma mesa em que não houvesse outro membro da sua família. Suponha que no total existam p famílias e a família i tem a_i membros. Suponha que há q mesas disponíveis e que a mesa j tem capacidade para acomodar b_j pessoas. Mostre como formular este problema como um problema de fluxo máximo.

7. Suponha que Neo quer enviar uma informação de um ponto (vértice) s a outro ponto t em uma rede com capacidades unitárias (isto é, cada aresta tem capacidade igual a 1). A Matrix pode impedir isto destruindo um conjunto de *arestas* da rede (o que seria equivalente a remover as arestas do grafo orientado). Mostre como a Matrix pode determinar um conjunto mínimo de arestas cuja remoção destrói todos os caminhos de s a t. Justifique.

8. Considere novamente o exercício anterior, mas agora suponha que a Matrix quer *desligar* um conjunto de *vértices* da rede (o que seria equivalente a remover tais vértices do grafo orientado). Mostre como a Matrix pode determinar um conjunto mínimo de vértices cuja remoção destrói todos os caminhos de s a t. Justifique.

9. Considere o seguinte problema. É dada uma rede de fluxo com arestas de capacidades unitárias, que consiste de um grafo direcionado $G = (V, E)$, uma fonte $s \in V$ e um sorvedouro $t \in V$ tal que $c_e = 1$ para todo $e \in E$. Também é dado um parâmetro k.

O objetivo é remover k arestas de modo a reduzir o fluxo máximo s-t em G tanto quanto possível. Em outras palavras, você deve encontrar um conjunto de arestas $F \subseteq E$ com $|F| = k$, de forma que fluxo máximo s-t em $G' = (V, E - F)$ seja tão pequeno quanto possível.

Dê um algoritmo de tempo polinomial para resolver este problema. Argumente que o algoritmo está correto e justifique a complexidade de tempo.

[*] Suponha por absurdo que todos vão desligar seus smartphones.