Provas da aula 11 - Caminhos mínimos

Seguem provas dos resultados apresentados na aula 11.

1. Teorema (subestrutura ótima de caminhos). Seja (G, w) um grafo direcionado **sem ciclos negativos** e seja

$$P = (v_1, v_2, \dots, v_k)$$

um caminho mínimo de v_1 a v_k. Então para quaisquer índices i, j com $1 \leq i \leq j \leq k$, o subcaminho

$$P_{ij} = (v_i, v_{i+1}, \dots, v_j)$$

é um caminho mínimo de v_i a v_j.

Prova. Dado um digrafo G sem ciclos negativos, sejam $P = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ um caminho mínimo de v_1 a v_k e $P_{ij} = (v_i, v_{i+1}, \dots, v_j)$ o subcaminho de v_i até v_j em P com $1 \leq i \leq j \leq k$. Note que:

$$P = P_{1i} P_{ij} P_{jk}$$

Denote por Q_{ij} um caminho mínimo em G de v_i até v_j. Desejamos provar que o custo de P_{ij} é igual ao de Q_{ij}. Para isso, suponhamos o contrário, ou seja, que o custo de P_{ij} é maior:

$$\omega(P_{ij}) > \omega(Q_{ij})$$

Assim, o passeio $P_{ij}^Q = P_{1i} Q_{ij} P_{jk}$ de v_1 até v_k, obtido ao substituir P_{ij} por Q_{ij} em P, tem custo menor que P:

$$\omega(P_{ij}^Q) = \omega(P_{1i}) + \omega(Q_{ij}) + \omega(P_{jk}) < \omega(P_{1i}) + \omega(P_{ij}) + \omega(P_{jk}) = \omega(P)$$

Como visto em aulas anteriores, todo passeio de um vértice u a um vértice v induz pelo menos um caminho de u até v, que pode ser obtido removendo ciclos do passeio. Desta forma, ao remover os ciclos de P_{ij}^Q obtemos um caminho P' de v_1 até v_k. Denotemos por $\mathcal{C}$ o conjunto de ciclos removidos de P_{ij}^Q, então temos:

$$\omega(P') = P_{ij}^Q - \sum_{C \in \mathcal{C}} \omega(C)$$

Note que P' é um caminho de v_1 até v_k, logo o custo de P' não pode ser menor que o custo de P que é um caminho mínimo de v_1 até v_k. Portanto:

$$\omega(P) \leq \omega(P') = P_{ij}^Q - \sum_{C \in \mathcal{C}} \omega(C) < \omega(P) - \sum_{C \in \mathcal{C}} \omega(C)$$

Isso implica que $\sum_{C \in \mathcal{C}} \omega(C) < 0$, ou seja, que há pelo menos um ciclo negativo em G, o que é uma contradição. Portanto, a nossa suposição de que P_{ij} não fosse um caminho mínimo é falsa.

2. Propriedades de algoritmos baseados em relaxação:

(a) **Limite superior:** Vale $d[v] \geq dist(s, v)$ e, tão logo $d[v]$ alcança $dist(s, v)$, nunca mais muda.

Prova. Suponha que a propriedade não vale. Logo $\exists u \in V$ tal que, em algum momento, $d[u] < dist(s, u)$. Seja então x o primeiro vértice para o qual $d[x] < dist(s, x)$ em algum momento durante o algoritmo.

A única forma de modificar o valor $d[x]$ é chamando o *Relax*. Seja (y, x) a aresta relaxada no momento em que $d[x]$ muda para $d[x] < dist(s, x)$. Temos que:

$$dist(s, x) > d[x] = d[y] + \omega(y, x) \geq dist(s, y) + \omega(x).$$

A primeira igualdade é dada pelo valor que toma $d[x]$ na função *Relax*, e a segunda desigualdade, pelo fato de $d[y] \geq dist(s, y)$, já que x é o primeiro vértice para o qual $d[x] < dist(s, x)$ e esta é a primeira vez que isso acontece.

Como $dist(s, x)$ é a distância de um caminho mínimo de s até x, temos que: $dist(s, x) \leq dist(s, y) + \omega(y, x)$, que seria o custo de um caminho de s até x passando por y. Logo, chegamos:

$$dist(s, x) > dist(s, y) + \omega(x) \geq dist(s, x),$$

o que é uma contradição. Portanto, a nossa suposição é falsa, e a propriedade é verdadeira.

A segunda parte da propriedade afirma que, se $d[u] = dist(s, u)$ para algum $v \in V$, então o valor $d[u]$ nunca muda. Note que o $d[u]$ só muda dentro do *Relax* e sempre diminui. Pela prova anterior, $dist(s, u)$ é sempre menor ou igual que $d[u]$. Logo, quando $d[u]$ alcança seu limitante inferior $(dist(s, u))$, esse valor não pode diminuir mais e, portanto, nunca muda.

(b) **Inexistência de caminho:** Se não existe caminho de s a v, então $d[v] = \infty$.

Prova. A prova pode ser feita de forma análoga à do item anterior (tente fazer).

(c) **Subgrafo de predecessores:** Se $d[v] < \infty$, então o subgrafo dos predecessores induzido por π é um caminho de peso $d[v]$.

Prova. A prova pode ser feita de forma análoga à do item anterior (tente fazer).

(d) **Convergência:** Se p é um caminho mínimo de s até v terminando com a aresta (u, v) e $d[u] = dist(s, u)$, então ao relaxar (u, v), $d[v] = dist(s, v)$, que nunca mais muda.

Prova. Se no momento de relaxar (u, v) temos que $d[v] > dist(s, v)$, como $dist(s, v) = dist(s, u) + \omega(u, v) = d[u] + \omega(u, v)$, temos que $d[v]$ ficaria com valor $d[u] + \omega(u, v) = dist(s, v)$, e, pela propriedade de **limite superior**, o valor não muda mais.

Caso contrário, pela propriedade de **limite superior**, $d[v] = dist(s, v)$ que não muda. Assim seja qual for o caso, a propriedade é verdadeira.

(e) **Relaxamento de caminho:** Se $p = (v_0, v_1, \ldots, v_k)$ é um caminho mínimo de $s = v_0$ a v_k e relaxamos as arestas de p na ordem (v_0, v_1), (v_1, v_2), $\ldots$, (v_{k-1}, v_k), então $d[v_k] = dist(s, v_k)$.

A propriedade vale mesmo se tivermos realizado quaisquer outras relaxações durante a execução.

Prova. Esta propriedade pode ser mostrada por indução em k.

- *Caso base.* $k = 0$, $v_0 = s$ e na inicialização $d[s] = 0 = dist(s, s)$, que, pela propriedade de **limite superior**, não muda.

- *Passo.* $k > 0$. Note que $p' = (v_0, v_1, \ldots, v_{k-1})$ é um caminho mínimo de v_0 até v_{k-1}, pelo **Teorema da subestrutura ótima de caminhos**. Assim, por hipótese de indução, ao relaxarmos as arestas de p' na ordem $(v_0, v_1), (v_1, v_2), \ldots, (v_{k-2}, v_{k-1})$, temos $d[v_{k-1}] = dist(s, v_{k-1})$.

  Observe que as condições da propriedade de **Convergência** são satisfeitas para a aresta (v_{k-1}, v_k), portanto, ao relaxá-la, teremos que $d[v_k] = dist(s, v_k)$.