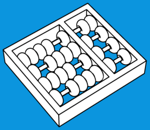
Reduções

MO417 - Complexidade de Algoritmos I

24

06/24

Santiago Valdés Ravelo
https://ic.unicamp.br/~santiago/
ravelo@unicamp.br



“No problem can be solved until it is reduced to some simple form.”

John Pierpont Morgan

Cotas para um problema

Formalizando problema

Como formalizar um problema **GENERICAMENTE**?

Definição (Problema computacional)

Um problema computacional é uma ***RELAÇÃO*** $P \subseteq \mathcal{I} \times \mathcal{S}$*, onde:*

- $\mathcal{I}$ *é o conjunto de entradas e*
- $\mathcal{S}$ *é o conjunto de saídas.*

Algoritmo para um problema

Definição

Dizemos que um algoritmo $\textsc{Alg}$ ***RESOLVE*** *um problema* $P = (\mathcal{I}, \mathcal{P})$ *se para toda entrada* $I \in \mathcal{I}$*, ele devolve uma saída* $S \in \mathcal{S}$ *tal que* $(I, S) \in P$*.*

- Escrevemos $I \in P$ para representar uma entrada.
- Escrevemos $A(I)$ para representar a saída do algoritmo.
- Denotamos por n o "tamanho" de I.
- Normalmente n é o números de bits de I.

Revisitando a complexidade de um algoritmo

Seja Alg um algoritmo para um problema P e n um parâmetro.

Notação O:

- Se o algoritmo leva tempo **NO MÁXIMO** $f(n)$ para toda entrada de tamanho n, então dizemos que Alg executa em tempo $O(f(n))$.

Notação Ω:

- Se o algoritmo leva tempo **PELO MENOS** $g(n)$ para alguma entrada de tamanho n, então dizemos que Alg executa em tempo $\Omega(g(n))$.

Cotas superior e inferior de um problema

Seja P um problema e seja n um parâmetro:

Definição (Cota superior)

*Uma função $f(n)$ é chamada de cota superior para P se **existe algum algoritmo** que resolve P em tempo $O(f(n))$.*

Definição (Cota inferior)

*Uma função $g(n)$ é chamada de cota inferior para P se **todo algoritmo** que resolve P leva tempo $\Omega(f(n))$.*

Algoritmo ótimo

Um algoritmo ALG é **ÓTIMO** para um problema P se:

1. ALG resolve P em tempo $O(f(n))$ e
2. $f(n)$ é uma cota inferior de P.

- HEAP-SORT e MERGE-SORT são ótimos para ordenação:
  - Eles têm complexidade $O(n \log n)$.
  - Ordenação tem cota inferior $\Omega(n \log n)$.
- BUSCA-BINARIA é ótimo para busca em vetor ordenado:
  - Tem complexidade $O(\log n)$.
  - Qualquer algoritmo leva tempo $\Omega(\log n)$.

Comparando problemas

Como comparamos dois algoritmos para **UM ÚNICO PROBLEMA**?

- Comparamos a complexidade de cada algoritmo.
- Descobrimos se um algoritmo é mais “rápido” que outro.

E se quisermos comparar **DOIS PROBLEMAS** A e B?

- Queremos descobrir se então A é mais “fácil” do que B.
- Podemos comparar as cotas de cada algoritmo.

Exemplo: Achar o máximo é mais **FÁCIL** que ordenar um vetor!

- Máximo tem cota superior $O(n)$.
- Ordenação tem cota inferior $\Omega(n \log n)$.

Reduções

Combinando problemas

Uma analogia

Um certo editor de literatura internacional é especialista em publicar livros em português. Ele conta com um time de tradutores, entre os quais:

- Cook, responsável por traduzir de **inglês para português**.
- Levin, responsável por traduzir de **russo para inglês**.

Em uma edição especial, ele irá publicar Crime e Castigo. Como traduzir de **RUSSO PARA PORTUGUÊS**?

- Em geral, lidamos com problemas bem conhecidos.
- Mas eventualmente, topamos com problemas novos.

  Pergunta: como relacionar esses problemas?

Redução

Problema A:

- Instância: I_A
- Solução: S_A

Problema B:

- Instância: I_B
- Solução: S_B

Definição

*Uma **REDUÇÃO** do problema A ao problema B é um par de sub-rotinas τ_I e τ_S tais que:*

- $\tau_{\mathbf{I}}$ *transforma uma instância I_A de A em uma instância I_B de B.*
- $\tau_{\mathbf{S}}$ *transforma uma solução S_B de I_B em uma solução S_A de I_A.*

Redução como um algoritmo

Como podemos resolver o problema A?

1. Suponha que existe um algoritmo $\textsc{Alg}_{\mathbf{B}}$ para o problema B.
2. Podemos usar $\textsc{Alg}_{\mathbf{B}}$ como uma **CAIXA-PRETA**.

Algoritmo: $\textsc{Redução}(I, A)$

$I_B \leftarrow \tau_I(I_A)$
$S_B \leftarrow \textsc{Alg}_{\mathbf{B}}(\mathbf{I_B})$
$S_A \leftarrow \tau_S(I_A, S_B)$
devolva S_A

Em outras palavras:

- Se sabemos resolver B, então também sei resolver A!
- A não é mais "difícil" que B.
- Denotamos $\mathbf{A} \preccurlyeq \mathbf{B}$.

Um problema de origem

Problema (Alocação de Centros (AC))

Entrada: *Um grafo bipartido conexo* $G = ((X \cup Y), E)$ *e uma função de pesos nas arestas* $w : E \to \mathbb{R}_+$.

Saída: *Uma função* $\phi : X \to Y$ *que aloque cada vértice* v *em* X *a um vértice* $\phi[v]$ *em* Y *tal que o peso* $w(v, \phi[v])$ *seja* ***MÍNIMO***.

Um problema de destino

Problema (Caminho Mínimo (CM))

Entrada: *Um grafo direcionado acíclico* $G = (V, E)$, *uma função de peso* $w : E \to \mathbb{R}_+$ *nas arestas e um vértice origem origem* s.

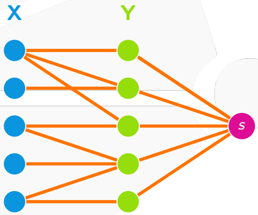
Saída: *Um vetor* d *com* $d[v] = \mathrm{dist}(s, v)$ *para* $v \in V$ *e um vetor* π *definindo uma* ***ÁRVORE DE CAMINHOS MÍNIMOS***.

Reduzindo. Transformação da entrada

Recebemos uma **ENTRADA** do problema de origem AC:

Algoritmo: $\tau_I(G, w)$

$G' \leftarrow G$
$w' \leftarrow w$
Adicione um novo vértice s a G'
para cada $v \in Y$
  Adicione a aresta (s, v) a G'
  $w'(s, v) \leftarrow 0$
devolva (G', w', s)



Tempo: $O(Y)$.

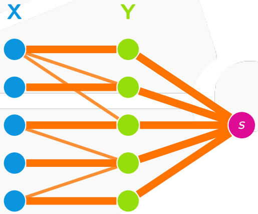
Reduzindo. Transformação da saída

Também recebemos uma **SOLUÇÃO** do problema de destino CM:

Algoritmo: $\tau_S(G, w, \mathbf{d}, \pi)$

---

para cada $v \in X$
    $\phi[v] \leftarrow \pi[v]$
devolva ϕ



Tempo: $O(X)$.

Reduzindo. AC $\preccurlyeq$ CM

Seja $\textsc{Alg}_{\mathsf{CM}}$ um algoritmo para Caminho Mínimo.

- $\textsc{Alg}_{\mathsf{CM}}$ poderia ser $\textsc{Dijkstra}$, $\textsc{Bellman-Ford}$...
- Pode ser que **NÃO CONHEÇAMOS** um algoritmo para o problema de destino!

Algoritmo: $\textsc{Redução-AC-CM}(G, w)$

$(G', w', s) \leftarrow \tau_I(G, w)$
$(d, \pi) \leftarrow \textsc{Alg}_{\mathsf{CM}}(G', w', s)$
$\phi \leftarrow \tau_S(G, w, d, \pi)$
devolva ϕ

Tempo total: [tempo da redução] $+$ [tempo de$\textsc{Alg}_{\mathsf{CM}}$]

Tempo da redução

Quanto tempo gastamos só com a redução?

- Não contamos o tempo do algoritmo para o problema B.
- A **COMPLEXIDADE DE UMA REDUÇÃO** $f(n)$ é a soma dos tempos das transformações τ_I e τ_S.
- Escrevemos $\mathbf{A} \preccurlyeq_{\mathbf{f(n)}} \mathbf{B}$.

No caso de REDUÇÃO-AC-CM: $\mathbf{AC} \preccurlyeq_{|\mathbf{X}|+|\mathbf{Y}|} \mathbf{CM}$.

Reduções polinomiais

Queremos construir algoritmos rápidos. Mas, o que é "rápido"?

- Normalmente, dizemos que um algoritmo é rápido se ele executa em **TEMPO POLINOMIAL**.
- Daí, queremos reduções de tempo polinomial.
- Nesse caso, escrevemos $\mathbf{A} \preccurlyeq_{\text{poli}} \mathbf{B}$.

Qual a consequência de $A \preccurlyeq_{\text{poli}} B$?

1. Se B tem um algoritmo de tempo polinomial, então A também.
2. Se A **NÃO** tem algoritmos de tempo polinomial, tampouco B.

- Isso é útil para distinguir problemas fáceis de difíceis!
- Mas, é assunto para depois...

Exemplos de reduções

Problema de origem

Problema (Sistema Linear (LS))

Entrada: *Uma matriz M de dimensões $n \times n$ com determinante* ***NÃO*** *nulo e um vetor b de dimensão n.*

Saída: *Um vetor x de dimensão n que satisfaz o seguinte sistema linear:*

$$Mx = b.$$

Problema de destino

Problema (Sistema Linear Simétrico (SLS))

Entrada: *Uma matriz M* ***SIMÉTRICA*** *de dimensões $n \times n$ com determinante* ***NÃO*** *nulo e um vetor b de dimensão n.*

Saída: *Um vetor x de dimensão n que satisfaz o seguinte sistema linear:*

$$Mx = b.$$

Perguntas

SLS é um caso particular de LS.

- Logo, trivialmente SLS $\preccurlyeq$ LS.
- Será que LS é estritamente mais difícil?

A resposta é **NÃO!**

- Iremos reduzir LS para SLS.
- Isso é, LS $\preccurlyeq$ SLS.

Um fato simples

Lema

Um vetor x é solução de $Mx = b$ se, e só se, x é solução de $M^T Mx = M^T b$.

Demonstração:

($\Rightarrow$)
- Multiplicamos $Mx = b$ por M^T.
- Obtemos $M^T Mx = M^T b$.

($\Leftarrow$)
- M^T tem determinante não nulo.
- Logo, M^T tem inversa Z.
- Multiplicamos $M^T Mx = M^T b$ por Z.
- Obtendo $Mx = b$

Observe que $M' = M^T M$ é uma matriz simétrica!

LS $\preccurlyeq$ SLS

Algoritmo: $\textsc{Redução-LS-SLS}(M, b)$

$M' \leftarrow M^T M$
$b' \leftarrow M^T b$
$x \leftarrow \textsc{Alg}_{\mathsf{SLS}}(M', b')$
devolva x

Concluímos que de fato LS $\preccurlyeq$ SLS.

Problema de origem

Problema (Casamento cíclico de strings (CSM))

Entrada: *Um alfabeto* Σ, *uma cadeia* $A = a_0 a_1 \dots a_{n-1}$ *com* n *símbolos e uma cadeia* $B = b_0 b_1 \dots b_{n-1}$ *com* n *símbolos.*

Saída: SIM, *se* B *for um* ***DESLOCAMENTO CÍCLICO*** *de* A, *ou* NAO, *caso contrário. Se* SIM, *então o número* k *de letras deslocadas faz parte da saída.*

Exemplo:

- Entrada: $A = acgtact$ e $B = gtactac$
- Saída: SIM, $k = 2$

Problema de destino

Problema (Casamento de strings (SM))

Entrada: *UM alfabeto Σ, uma cadeia $A = a_0 a_1 \ldots a_{n-1}$ com n símbolos e uma cadeia $B = b_0 b_1 \ldots b_{m-1}$ com m símbolos.*

Saída: SIM, *se B for **SUBCADEIA** de A, ou* NAO, *caso contrário. Se* SIM, *o índice k da primeira ocorrência de B em A, faz parte da saída.*

Exemplo:

- Entrada: $A = acgttaccgtacccg$ e $B = tac$
- Saída: SIM, $k = 4$

Observação: o problema SM pode ser resolvido em tempo $O(n + m)$ pelo algoritmo KMP de Knuth, Morris and Pratt (1977).

CSM $\preccurlyeq$ SM

Algoritmo: $\textsc{Redução-CSM-SM}(A, B, n)$

$A' \leftarrow AA$ $\quad\triangleright$ concatena duas cópias de A
$B' \leftarrow B$
$n' \leftarrow 2n$
$m' \leftarrow n$
devolva $\textsc{Alg}_{\mathsf{SM}}(A', n', B', m')$

- **Tempo da redução:** $O(n)$
- **Correção:** basta mostrar que k é a solução de SM, se e só se, k é solução de CSM.

Exemplo:

- $I_{CSM} = (acgtact, gtactac, 7)$.
- $I_{SM} = (acgtactacgtact, 14, gtactac, 7)$.
- $S_{SM} = S_{CSM} = (\text{SIM}, 2)$.

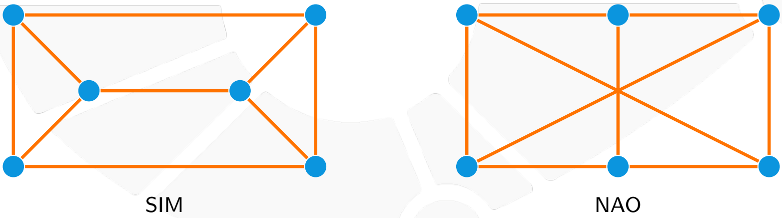
Problema de origem

Problema (Existência de triângulo (PET))

Entrada: *Um grafo conexo $G = (V, E)$ sem laços com $n = |V|$ e $m = |E|$.*

Saída: *Decidir se G contém um triângulo.*

Exemplo:



Observações sobre o PET

Alguns algoritmos conhecidos:

- Um algoritmo trivial de tempo $O(n^3)$:
  - Verifica todas as triplas de vértices.
- Um algoritmo $O(mn)$:
  - É muito bom se o grafo é **ESPARSO**.

Vamos supor que o grafo é denso:

- G será representado por uma matriz de adjacência A:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i,j) \in E \\ 0 & \text{se } (i,j) \notin E \end{cases}$$

Um lema útil

Lema

Seja $A^2 = A \times A$, ou seja, $a^2_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{kj}$.
Então, $a^2_{ij} > 0$ se e somente se existe caminho de tamanho dois saindo de i e chegando em j.

Demonstração:

($\Rightarrow$)
- Se $a^2_{ij} > 0$, então algum termo $a_{ik} a_{kj}$ é positivo.
- Segue que $a_{ik} = 1$ e $a_{kj} = 1$.
- Ou seja, há arestas (i, k) e (k, j).

($\Leftarrow$)
- Seja um caminho (i, k, j) de i até j.
- Então, $a_{ik} = 1$ e $a_{kj} = 1$.
- Daí, $a_{ik} a_{kj} > 0$ e, portanto, $a^2_{ij} > 0$.

Problema destino

Problema (Multiplicação de Matrizes Quadradas (MMQ))

Entrada: *Uma matriz quadrada A de ordem n e uma matriz quadrada B de ordem n.*

Saída: *O produto $P = A \times B$.*

Observações:

- Há um algoritmo óbvio de complexidade $O(n^3)$.
- MMQ pode ser resolvida mais rapidamente:
  - Em tempo $O(n^{2,807})$ pelo algoritmo de Strassen (1969).
  - Em tempo $O(n^{2,376})$ pelo algoritmo de Coppersmith e Winograd (1990).
  - Em tempo $O(n^{2,3728639})$ pelo de François Le Gall (2014).

PET $\preccurlyeq$ MMQ

Observe que só existe triângulo com aresta (i, j) se:

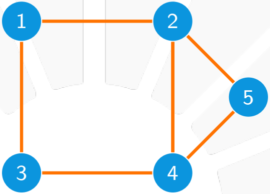
1. Existir um caminho de tamanho 2 de i a j.
2. Existir a aresta (i, j).

Algoritmo: $\textsc{Redução-PET-MMQ}(A, n)$

$A^2 \leftarrow \textsc{Alg}_{\text{MMQ}}(A, n)$
para $i = 1$ **até** n
  para $j = 1$ **até** n
    se $a^2_{ij} > 0$ **e** $a_{ij} = 1$
      devolva SIM
devolva NAO

- **Tempo da redução:** $O(n^2)$.
- **Tempo total:** $O(n^{2,3728639})$.

PET $\preccurlyeq$ MMQ



A	1	2	3	4	5
1	0	1	1	0	0
2	1	0	0	1	1
3	1	0	0	1	0
4	0	1	1	0	1
5	0	1	0	1	0

A^2	1	2	3	4	5
1	2	0	0	2	1
2	0	3	2	1	1
3	0	2	2	0	1
4	2	1	0	3	1
5	1	1	1	1	2

Considerando o caso particular

Considere um caso particular de MMQ:

Problema (Multiplicação de Matrizes Simétricas (MMS))

Entrada: *Uma matriz* ***SIMÉTRICA*** *quadrada A de ordem m e uma matriz* ***SIMÉTRICA*** *quadrada B de ordem m.*

Saída: *O produto $P = A \times B$.*

Claro que MMS $\preccurlyeq_{m^2}$ MMQ.

- Portanto, MMQ é pelo menos tão difícil quanto MMS.
- Será que MMS também é pelo menos tão difícil quanto MMQ?

Reduzindo MMQ $\preccurlyeq$ MMS

1. Considere uma instância de MMQ, $I_{MMQ} = (A, B, n)$.
2. Construa uma instância de MMS, $I_{MMS} = (A', B', 2n)$, em que

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B' = \begin{bmatrix} 0 & B^T \\ B & 0 \end{bmatrix}.$$

3. A solução de MMS é:

$$P' = A'B' = \begin{bmatrix} AB & 0 \\ 0 & A^T B^T \end{bmatrix}.$$

4. Devolva o primeiro bloco da matriz P'.

Tempo da redução: $O(n^2)$.

- Construir I_{MMQ} leva tempo $O(n^2)$.
- Copiar o bloco e P' leva tempo $O(n^2)$.

Interpretando os fatos

- Suponha que exista um algoritmo para MMS de tempo **O(T(m))** para algum polinômio $T(m)$.
  - Lembre que m é a ordem das matrizes A' e B'.
- Quão pequeno pode ser $T(m)$?
  - É claro que $T(m) = \Omega(m^2)$, pois é preciso ler a entrada.
  - Será que pode ser mais rápido que $o(m^{2,3728639})$?

Para responder isso, usamos a redução MMQ $\preccurlyeq_{n^2}$ MMS:

- Ela implica em um algoritmo de tempo total $O(T(m) + n^2)$.
- Como $m = 2n$, tempo é $O(T(2n) + n^2) = O(T(n) + n^2)$.
- Como $T(n)$ domina n^2, o tempo é simplesmente $O(T(n))$.

Ou seja: Um algoritmo com complexidade $T(m)$ para MMS implica em um algoritmo com complexidade $T(n)$ para MMQ!

Reduções para obtenção de cota inferior

Uma redução $A \preccurlyeq_{f(n)} B$

Suponha que:

- A tem cota inferior $h(n)$.
- $\textrm{ALG}_B$ resolve B em tempo $g(n)$.
- A redução gasta tempo $f(n) \leq \frac{h(n)}{2}$.

Então, um algoritmo baseado na redução $A \preccurlyeq_{f(n)} B$ tem tempo:

$$f(n) + g(n) \geq h(n) \Rightarrow g(n) \geq h(n) - f(n) \geq h(n) - \frac{h(n)}{2} = \frac{h(n)}{2}$$

Conclusão: $g(n) \geq \Omega(h(n))$.

Transferindo cotas inferiores

Teorema

Considere dois problemas A e B e suponha que

1. $h(n)$ *é cota inferior para* A *e*
2. $A \preccurlyeq_{f(n)} B$,
3. $f(n) = o(h(n))$.

Então $h(n)$ *é cota inferior para* B.

Observações:

- A cota inferior depende do **MODELO DE COMPUTAÇÃO**.
- Supomos o mesmo modelo para ambos problemas.

Problema de origem

Problema (Ordenação (ORD))

Entrada: *Uma sequência* $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *de* n *elementos comparáveis.*

Saída: *Uma permutação de* X *cujos elementos estejam ordenados.*

Observações:

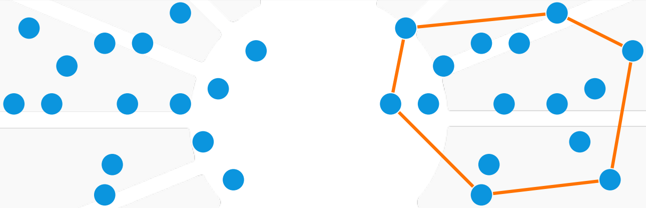
- Só podemos comparar dois elementos por uma sub-rotina caixa-preta de tempo constante (chamada **ORÁCULO**).
- Esse problema tem cota inferior $\Omega(n \log n)$.

Problema de destino

Problema (Envoltória Convexa (EC))

Entrada: *Um conjunto* $\{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$ *de n pontos no plano.*

Saída: MENOR POLÍGONO CONVEXO *que contém os n pontos.*



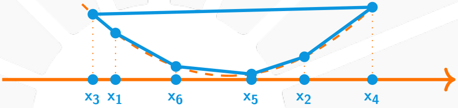
Observações:

- Os vértices são representados em ordem anti-horária.
- Problema clássico de Geometria Computacional.
- Pode ser resolvido em tempo $O(n \log n)$.

ORD $\preccurlyeq_n$ EC

Reduzindo ORD $\preccurlyeq_n$ EC:

1. Considere uma instância de $I_{ORD} = (x_1, x_2 \ldots, x_n)$.
2. Construa instância $I_{EC} = \{(x_1, x_1^2), (x_2, x_2^2), \ldots, (x_n, x_n^2)\}$.



3. Resolva I_{EC} e obtenha solução S_{EC}, que é uma lista **CÍCLICA** dos vértices do polígono.
4. Determine índice i de S_{EC} do ponto com menor abcissa.
5. Liste os todos os índices a partir de i.

- O tempo da redução é $O(n)$.
- Portanto $\Omega(n \log n)$ também é **COTA INFERIOR** para EC.

Problema de origem

Problema (Unicidade de Elementos (UE))

Entrada: *Uma sequência* $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *de* n *elementos comparáveis.*

Saída: *Decidir se os elementos são* ***TODOS*** *distintos.*

Observações:

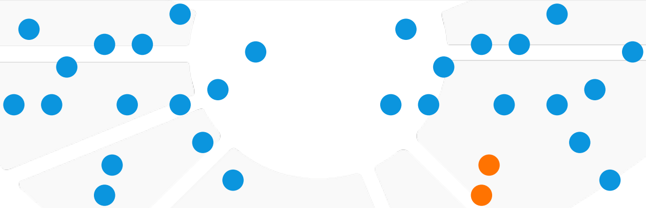
- Só podemos comparar dois elementos por uma sub-rotina caixa-preta de tempo constante (chamada **ORÁCULO**).
- Esse problema tem cota inferior $\Omega(n \log n)$.
- O problema pode ser resolvido em tempo $O(n \log n)$ (como?).

Problema de destino

Problema (Par Mais Próximo (PMP))

Entrada: *Uma coleção* $\{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$ *de* n *pontos no plano.*

Saída: *Par de pontos* i *e* j *que estejam* ***A MENOR DISTÂNCIA****.*



Observação:

- Pode ser resolvido em tempo $O(n \log n)$

Reduzindo UE $\preccurlyeq_n$ PMP

1. Considere instância $I_{UE} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
2. Construa instância $I_{PMP} = \{(x_1, 0), (x_2, 0), \ldots, (x_n, 0)\}$.

3. Resolva I_{PMP} e obtenha par de pontos $(x_i, 0), (x_j, 0)$.
4. Calcule a **DISTÂNCIA** d entre os pontos:
   (a) Se $d = 0$, então devolva NAO.
   (b) Se $d > 0$, devolva SIM.

- O tempo da redução é $O(n)$.
- Portanto $\Omega(n \log n)$ também é **COTA INFERIOR** para PMP.

Problema de origem

Problema (3-Soma (3SUM))

Entrada: *Uma sequência* $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *de* n *reais.*
Saída: *Determinar se existem índices distintos* i,j *e* k *tais que:*

$$x_i + x_j + x_k = 0.$$

Exemplo:

- Instância $X = (\underline{4}, -6, \underline{1}, 8, 7, \underline{-5})$
- Solução $i = 1$, $j = 3$ e $k = 6$

Observações:

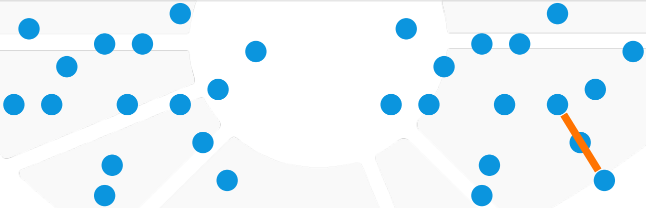
- Pode ser resolvido em $O(n^2)$ (como?).
- Acreditava-se que $\Omega(n^2)$ era **COTA INFERIOR**.
- Pode ser resolvido em $o(n^2)$ (Grønlund e Pettie, 2014).
- Ainda se acredita que não dá pra fazer melhor que $n^{2-\Omega(1)}$.

Problema de destino

Problema (Colinearidade Não Horizontal (COL))

Entrada: *Um conjunto* $\{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$ *de n pontos no plano.*

Saída: *Determinar se três pontos estão em alguma* ***RETA NÃO HORIZONTAL****.*

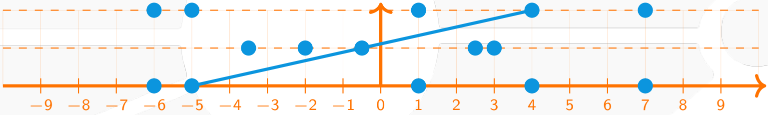


Observações:

- Pode ser resolvido em tempo $O(n^2)$.
- Acredita-se que $\Omega(n^2)$ é **COTA INFERIOR**.

Reduzindo 3SUM $\preccurlyeq_n$ COL

1. Considere instância $I_{3SUM} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
2. Construa instância
   $I_{COL} = \{(x_i, 0), (-x_i/2, 1), (x_i, 2) : i = 1, 2, \ldots, n\}$.
   Exemplo: $X = (4, -6, 1, 8, 7, -5)$:



3. Resolva I_{COL} e obtenha S_{COL}.
4. Se a resposta S_{COL} for SIM, responda SIM,
   e se a resposta S_{COL} for NAO, responda NAO.

3SUM $\preccurlyeq_n$ COL (cont)

- A solução de I_{COL} (se houver) é uma tripla de pontos colineares. Claramente, cada um desses pontos deve estar em um dos eixos horizontais. Ou seja, tem a forma:

  $$(x_i, 0), (-x_j/2, 1), (x_k, 2).$$

  Portanto, $x_i + x_j + x_k = 0$.

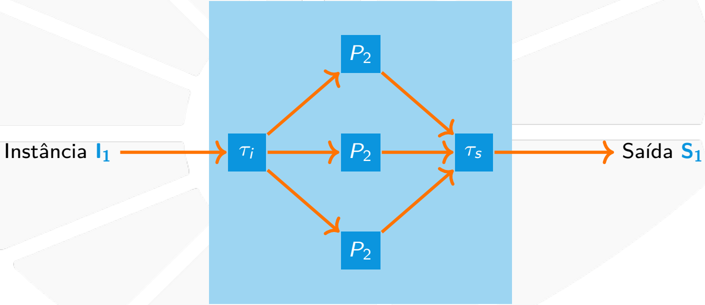
- Se $x_i + x_j + x_k = 0$, então, os pontos citados são colineares.

3SUM $\preccurlyeq_n$ COL

- É claro que $\Omega(n)$ é uma cota inferior para 3SUM.
- E **SE** houver cota inferior $\Omega(h(n))$ maior para 3SUM?
  - A redução gasta tempo $f(n) = O(n)$.
  - Nesse caso, $f(n) = o(h(n))$.
  - Então, $\Omega(h(n))$ seria cota inferior para COL
- Mas só conhecemos a cota trivial $\Omega(n)$ para 3SUM.

Redução de Turing

Podemos reduzir P_1 para P_2 fazendo várias aplicações de P_2.



Exemplo de redução de Turing

Problema (Multiplicação de Inteiros)

Entrada: *Dois inteiros a e b.*
Saída: *O produto $a \cdot b$.*

Problema (Quadrado)

Entrada: *Um inteiro x.*
Saída: *O quadrado x^2.*

Redução:

- Podemos reduzir Multiplicação de Inteiros para Quadrado.
- Fazemos apenas um número constante de somas, subtrações e divisão por dois:

$$a \cdot b = \frac{(a+b)^2 - a^2 - b^2}{2}$$

Refletindo sobre reduções e cotas inferiores

Vamos fazer alguns exercícios?

Exercício 1

O problema 3SUMplus consiste em: dados uma sequência $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de reais e um valor real b, determinar se existem três índices distintos i, j e k tais que $x_i + x_j + x_k = b$.

1. Mostre que 3SUM $\preccurlyeq_n$ 3SUMplus.
2. Mostre que 3SUMplus $\preccurlyeq_n$ 3SUM.
3. Suponha que o Professor Sabit Udo descobriu uma **COTA INFERIOR** de $\Omega(n^{1,9})$ para 3SUMplus. Nesse caso, quais das afirmações abaixo são verdadeiras?
   (i) Não existe algoritmo $O(n^{1,5})$ para 3SUMplus.
   (ii) Não existe algoritmo $O(n^{1,5})$ para 3SUM.
   (iii) Existe um algoritmo $O(n^{1,9})$ para 3SUMplus.
   (iv) Existe um algoritmo $O(n^{1,9})$ para 3SUM.

Exercício 2

Considere os problemas:

Problema (Sistema de Representantes Distintos (SRD))

Entrada: *Uma coleção de conjuntos* $S_1, \ldots, S_k$.

Saída: *Conjunto* $R = \{r_1, \ldots, r_k\}$ *tal que* $r_i \in S_i$ *para* $i = 1, \ldots, k$.

Problema (Emparelhamento Máximo (EM))

Entrada: *Um grafo bipartido* $G = (X \cup Y, E)$ *com bipartição* X *e* Y.

Saída: *Um subconjunto de arestas* M *que não compartilham vértices, tal que* $|M|$ *seja máximo.*

Mostre que SRD $\preccurlyeq$ EM.

Exercício 3

Considere os seguintes problemas:

Problema (Edição de String)

Entrada: *Duas strings A e B.*
Saída: *Menor sequência de operações para transformar A em B, onde as possíveis operações são:* ***inserção*** *de um caractere,* ***remoção*** *de um caractere, ou* ***troca*** *de um caractere por outro.*

Problema (Caminho Mínimo)

Entrada: *Um grafo direcionado $G(V, E)$, um peso $c_{ij} \geq 0$ para cada aresta $(i, j) \in E$, dois vértices s e t.*
Saída: *Um caminho de s a t em G de comprimento mínimo.*

Mostre como reduzir Edição de String a Caminho Mínimo.

Exercício 4

Considere os seguintes problemas:

Problema (Ordenação)

Entrada: *Uma sequência de números naturais distintos* $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
Saída: *Uma permutação ordenada dos números de entrada.*

Problema (Codificação de Huffman)

Entrada: *Um alfabeto* C *e uma tabela de frequências* f.
Solução: *Uma codificação de comprimento variável que minimize o tamanho do texto codificado.*

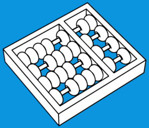
Mostre como reduzir Ordenação para Codificação de Huffman.

Reduções

MO417 - Complexidade de Algoritmos I

24

06/24



Santiago Valdés Ravelo
https://ic.unicamp.br/~santiago/
ravelo@unicamp.br

UNICAMP