



Problemas para os Projetos

Problemas com Justiça

Justiça proporcional Seja $X = X_1 \cup \dots \cup X_q$ um conjunto de elementos particionado em q cores. Uma solução S é ε -justa se, para quaisquer duas cores i e i' , as frações de elementos dessas cores presentes na solução diferirem em no máximo ε :

$$\left| \frac{|S \cap X_i|}{|X_i|} - \frac{|S \cap X_{i'}|}{|X_{i'}|} \right| \leq \varepsilon.$$

Seguem os problemas selecionados que usam essa definição:

1. Floresta de Steiner Justa. São dados um grafo conexo e ponderado $G = (V, E)$ com pesos não negativos $\omega : E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, um conjunto de terminais $T \subseteq V$ particionado em q cores $T = T_1 \cup \dots \cup T_q$, um inteiro $k \geq 1$ e $\varepsilon \geq 0$. Se deseja encontrar uma floresta $F \subseteq E$ com no máximo k componentes conexas que minimize

$$\omega(F) = \sum_{e \in F} \omega(e),$$

sujeita à condição de que, para toda componente C_j de F e todo par de cores $i, i' \in \{1, \dots, q\}$,

$$\left| \frac{|C_j \cap T_i|}{|T_i|} - \frac{|C_j \cap T_{i'}|}{|T_{i'}|} \right| \leq \varepsilon.$$

2. Escalonamento Justo. É dado um conjunto de tarefas J , em que cada tarefa $j \in J$ possui um tempo de processamento $p_j \geq 0$. Também é definida uma cor entre $\{1, \dots, q\}$ para cada tarefa, sendo $J_1, \dots, J_q$ os conjuntos de tarefas de cada cor. Dado um número m de máquinas idênticas e $\varepsilon \geq 0$, se deseja encontrar uma atribuição

$$a : J \rightarrow \{1, \dots, m\}$$

que minimize o *makespan*

$$C_{\max} = \max_{r \in \{1, \dots, m\}} \sum_{j: a(j)=r} p_j,$$

sujeita à condição de justiça

$$\left| \frac{|\{j \in J_i : a(j) = r\}|}{|J_i|} - \frac{|\{j \in J_{i'} : a(j) = r\}|}{|J_{i'}|} \right| \leq \varepsilon$$

para toda máquina r e todo par de cores i, i' .

3. Facility Location Justa nos Clientes. São dados um conjunto de clientes D , um conjunto de possíveis facilities F , custos de abertura $f_i \geq 0$ para cada $i \in F$ e custos de atribuição $c_{ij} \geq 0$ para cada cliente $j \in D$ e facility $i \in F$. Os clientes são particionados em q cores

$$D = D_1 \cup \dots \cup D_q.$$

Dado $\varepsilon \geq 0$, se deseja encontrar um conjunto de facilities abertas $S \subseteq F$ e uma atribuição $a : D \rightarrow S$ que minimize

$$\sum_{i \in S} f_i + \sum_{j \in D} c_{a(j)j},$$

sujeita à condição de justiça

$$\left| \frac{|\{j \in D_i : a(j) = r\}|}{|D_i|} - \frac{|\{j \in D_{i'} : a(j) = r\}|}{|D_{i'}|} \right| \leq \varepsilon$$

para toda facility aberta $r \in S$ e todo par de cores $i, i' \in \{1, \dots, q\}$.

4. Facility Location Justa nas Facilities. São dados um conjunto de clientes D , um conjunto de possíveis facilities F , custos de abertura $f_i \geq 0$ para cada $i \in F$ e custos de atribuição $c_{ij} \geq 0$ para cada cliente $j \in D$ e facility $i \in F$. As facilities são particionadas em q cores

$$F = F_1 \cup \dots \cup F_q.$$

Dado $\varepsilon \geq 0$, se deseja encontrar um conjunto de facilities abertas $S \subseteq F$ e uma atribuição $a : D \rightarrow S$ que minimize

$$\sum_{i \in S} f_i + \sum_{j \in D} c_{a(j)j},$$

sujeita à condição de justiça

$$\left| \frac{|F_i \cap S|}{|F_i|} - \frac{|F_{i'} \cap S|}{|F_{i'}|} \right| \leq \varepsilon$$

para todo par de cores $i, i' \in \{1, \dots, q\}$.

5. k -Cobertura Máxima Justa. São dados um universo U de elementos com pesos $\omega(e) \geq 0$ para cada $e \in U$, uma coleção $\mathcal{S} \subseteq 2^U$ de subconjuntos de U e um inteiro $k \geq 1$. Onde, o conjunto U é particionado em q cores

$$U = U_1 \cup \dots \cup U_q.$$

. Se deseja selecionar uma subcoleção $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$, com $|\mathcal{S}'| \leq k$, que maximize

$$\sum_{e \in \bigcup_{S \in \mathcal{S}'} S} \omega(e),$$

sujeita à condição de justiça

$$\left| \frac{|U_i \cap \bigcup_{S \in \mathcal{S}'} S|}{|U_i|} - \frac{|U_{i'} \cap \bigcup_{S \in \mathcal{S}'} S|}{|U_{i'}|} \right| \leq \varepsilon$$

para todo par de cores i, i' .

6. Árvore Geradora Mínima Justa. Dado um grafo conexo ponderado $G = (V, E)$, com custos não negativos $\omega : E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, uma partição das arestas em q cores

$$E = E_1 \cup \dots \cup E_q,$$

e um parâmetro de penalização $\lambda \geq 0$, encontrar uma árvore geradora $T \subseteq E$ que minimize

$$\omega(T) = \sum_{e \in T} \omega(e) + \lambda \cdot \max_{i, i' \in \{1, \dots, q\}} \left| \frac{|T \cap E_i|}{|E_i|} - \frac{|T \cap E_{i'}|}{|E_{i'}|} \right|.$$

Problemas com Conflito

Nos problemas a seguir, um **conjunto de conflitos** é dado como parte da entrada. Um conflito entre dois elementos significa que eles não podem participar conjuntamente da solução da maneira especificada em cada problema.

7. Floresta de Steiner com Conflitos São dados um grafo métrico $G = (V, E, \omega)$, um conjunto de terminais $T \subseteq V$, particionado em q cores $T = T_1 \cup \dots \cup T_q$ e um conjunto de pares de cores em conflito

$$\mathcal{C} \subseteq \binom{q}{2}.$$

Se deseja encontrar uma floresta $F \subseteq E$ que minimize

$$\omega(F) = \sum_{e \in F} \omega(e),$$

tal que:

1. todos os terminais pertencentes a uma mesma cor estejam conectados;
2. nenhuma componente contenha simultaneamente terminais de duas cores em conflito.

8. k -Center com Conflitos entre Centros Dados um espaço métrico V, ω , um inteiro k e um conjunto de pares de pontos em conflito

$$\mathcal{C} \subseteq \binom{V}{2},$$

encontrar um conjunto de no máximo k centros $S \subseteq V$ que minimize

$$\max_{u \in V} \min_{v \in S} \omega(u, v)$$

sujeito a que S não pode conter simultaneamente dois centros em conflito.

9. Facility Location com Conflitos entre Facilities São dados um conjunto de clientes D , um conjunto de possíveis facilities F , custos de abertura $f_i \geq 0$ para cada $i \in F$ e custos de atribuição $c_{ij} \geq 0$ para cada cliente $j \in D$ e facility $i \in F$. Também é dado um conjunto de facilities em conflito

$$\mathcal{C} \subseteq \binom{F}{2}.$$

Se deseja encontrar um conjunto de facilities abertas $S \subseteq F$ e uma atribuição $a : D \rightarrow S$ que minimize

$$\sum_{i \in S} f_i + \sum_{j \in D} c_{a(j)j},$$

sujeito a que S não conter simultaneamente duas facilites em conflito.

10. Facility Location com Conflitos entre Clientes São dados um conjunto de clientes D , um conjunto de possíveis facilities F , custos de abertura $f_i \geq 0$ para cada $i \in F$ e custos de atribuição $c_{ij} \geq 0$ para cada cliente $j \in D$ e facility $i \in F$. Também é dada uma penalização de conflito para cada par de clientes

$$\lambda : \binom{D}{2} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},$$

Se deseja encontrar um conjunto de facilities abertas $S \subseteq F$ e uma atribuição $a : D \rightarrow S$ que minimize

$$\sum_{i \in S} f_i + \sum_{j \in D} c_{a(j)j} + \sum_{j, j' \in D: a(j)=a(j')} \lambda(j, j').$$

11. Árvore Geradora Mínima com Conflitos Dado um grafo conexo ponderado $G = (V, E)$, com custos não negativos $\omega : E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ e uma penalização de conflito para cada par de arestas

$$\lambda : \binom{E}{2} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},$$

encontrar uma árvore geradora $T \subseteq E$ de custo mínimo,

$$\omega(T) = \sum_{e \in T} \omega(e) + \sum_{e, e' \in T} \lambda(e, e').$$

12. Cobertura por Conjuntos com Conflitos São dados um universo de elementos U , uma família de conjuntos

$$\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_m\} \subseteq 2^U,$$

com $\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S = U$, um custo c_i para cada conjunto S_i e uma penalização de conflito para cada par de subconjuntos

$$\lambda : \binom{\mathcal{S}}{2} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Se deseja encontrar uma subfamília $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ de custo mínimo

$$c(\mathcal{S}') = \sum_{S_i \in \mathcal{S}'} c_i + \sum_{S_i, S_j \in \mathcal{S}'} \lambda(S_i, S_j).$$

que cubra todo o universo,

$$\bigcup_{S \in \mathcal{S}'} S = U.$$

13. k -Cobertura Máxima com Conflitos entre Conjuntos São dados um universo de elementos U , uma família de subconjuntos

$$\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_m\} \subseteq 2^U,$$

um inteiro k e um conjunto de subconjuntos em conflito

$$\mathcal{C} \subseteq \binom{\mathcal{S}}{2}.$$

Se deseja encontrar uma subfamília $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$, com

$$|\mathcal{S}'| \leq k,$$

que maximize o número de elementos cobertos:

$$\left| \bigcup_{S \in \mathcal{S}'} S \right|,$$

tal que $\mathcal{S}'$ não contenha simultaneamente dois subconjuntos em conflito.

14. k -Cobertura Máxima com Conflitos entre Elementos São dados um universo de elementos U , um peso associado a cada elemento

$$\omega : U \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},$$

uma família de subconjuntos

$$\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_m\} \subseteq 2^U,$$

um inteiro k e um conjunto de elementos em conflito

$$\mathcal{C} \subseteq \binom{U}{2}.$$

Se deseja encontrar uma subfamília $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$, com

$$|\mathcal{S}'| \leq k,$$

que maximize o custo

$$c(\mathcal{S}') = \sum_{e: \exists S \in \mathcal{S}', e \in S} \omega(e),$$

tal que dois elementos em conflito não sejam cobertos pelo mesmo número de subconjunto em $\mathcal{S}'$. Isto é, $\forall e_1, e_2 \in \mathcal{C}$, $|\{S : e_1 \in S \text{ e } S \in \mathcal{S}'\}| \neq |\{S : e_2 \in S \text{ e } S \in \mathcal{S}'\}|$.

15. k -Median com Conflitos Dados um espaço métrico V, ω , um inteiro k e um conjunto de pares de pontos em conflito

$$\mathcal{C} \subseteq \binom{V}{2},$$

encontrar um conjunto de no máximo k centros $S \subseteq V$ que minimize

$$\sum_{u \in V} \min_{v \in S} \omega(u, v)$$

sujeito a que S não pode conter simultaneamente dois centros em conflito.