

Nome: _____

RA: _____ Assinatura: _____

Observações:

- Leia com cuidado o enunciado da questão antes de começar. Você pode solicitar esclarecimentos durante o teste.
- Explique e justifique a sua resposta.
- Você também pode obter pontos por uma resposta parcial.
- É proibido qualquer tipo de consulta bibliográfica.
- O teste é individual, qualquer detecção de fraude implicará em zerar a nota da disciplina.

Questão 1. Uma rede de comunicação pode ser representada por um grafo $G = (V, E)$. Uma empresa deseja monitorar as conexões (arestas) da rede e, para isso, precisa instalar equipamentos de monitoramento nos vértices. Uma conexão é considerada *monitorada* se pelo menos uma de suas extremidades possui um equipamento.

Como os equipamentos são caros, a empresa pode instalar no máximo k equipamentos. Assim, seu objetivo é determinar onde instalar os equipamentos de modo a maximizar o número de conexões monitoradas.

Considere o seguinte algoritmo guloso:

Inicialmente, nenhum vértice possui equipamento. Em cada uma das k iterações, escolha um vértice que, ao receber um equipamento, monitore o maior número de conexões que ainda não estão monitoradas.

Sejam S_G o conjunto produzido pelo algoritmo e S^* uma solução ótima.

- (a) **(2 ponto)** Denote por $f : 2^V \rightarrow \mathbb{N}$ a função que, para cada subconjunto $S \subseteq V$, retorna o número de conexões monitoradas quando os equipamentos são instalados nos vértices de S . Mostre que f é monotônica e submodular.
- (b) **(3 pontos)** Mostre que, em qualquer iteração do algoritmo, existe um vértice $v \in S^*$ tal que

$$f(S \cup v) - f(S) \geq \frac{f(S^*) - f(S)}{k}.$$

- (c) **(3 pontos)** Conclua que o algoritmo guloso produz uma solução S_G tal que

$$f(S_G) \geq \left(1 - \frac{1}{e}\right) f(S^*).$$

(d) **(2 pontos)** Um aluno afirma:

Como cada vértice escolhido pelo algoritmo cobre o maior número possível de arestas, basta escolher os k vértices de maior grau no grafo original. Esse algoritmo deve produzir a mesma solução.

Mostre que a afirmação é falsa apresentando um contraexemplo.

(e) **(3 pontos extra)** Qual é o fator de aproximação do algoritmo sugerido pelo aluno no item (d)? Justifique a sua resposta.