

Nome: _____

RA: _____ Assinatura: _____

Observações:

- Leia com cuidado o enunciado da questão antes de começar. Você pode solicitar esclarecimentos durante o teste.
- Explique e justifique a sua resposta. Você também pode obter pontos por uma resposta parcial.
- É proibido qualquer tipo de consulta bibliográfica. O teste é individual, qualquer detecção de fraude implicará em zerar a nota da disciplina.

Questão 1. Considere o problema k -center em um espaço métrico. Dado um conjunto de vértices V , uma distância d e um inteiro k , deseja-se escolher até k centros $S \subseteq V$ minimizando a maior distância de um vértice $u \in V$ ao centro mais próximo $v \in S$.

Para um dado valor T , considere o seguinte PL:

$$\begin{aligned} \sum_i x_i &\leq k, \\ \sum_i y_{ij} &= 1, \quad \forall j, \\ y_{ij} &\leq x_i, \quad \forall i, j, \\ y_{ij} &= 0, \quad \text{se } d(i, j) > T, \\ x_i, y_{ij} &\geq 0. \end{aligned}$$

Se o PL tiver solução para um valor de T , considere o seguinte algoritmo:

1. Comece com todos os vértices não atendidos.
2. Escolha arbitrariamente um vértice v ainda não atendido.
3. Abra v como centro.
4. Marque como atendidos todos os vértices u tais que $d(u, v) \leq 2T$.
5. Repita enquanto houver vértices não atendidos.

Responda as seguintes questões:

- (a) **(5 pontos)** Mostre que o algoritmo retorna uma solução viável.
- (b) **(1 ponto)** Mostre que o valor da solução obtida pelo algoritmo é no máximo $2T$.
- (c) **(4 pontos)** Proponha uma 2-aproximação polinomial que use esse algoritmo.
- (d) **(1 ponto extra)** Para algum $\alpha < 2$, troque o passo 4 do algoritmo para que marque como atendidos todos os vértices u tais que $d(u, v) \leq \alpha T$. Isso permite obter uma α -aproximação polinomial?