Representação e manipulação exatas de mapas esféricos

Marcus Vinícius Alvim Andrade

Tese de Doutorado

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Andrade, Marcus Vinícius Alvim

An24r Representação e manipulação exatas de mapas esféricos / Marcus Vinícius Alvim Andrade – Campinas, [S.P. :s.n.] 1999.

Orientador: Jorge Stolfi

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Computação.

1. Algoritmos. 2. Mapas. 3. Geometria projetiva. 4. Geometria - Processamento de dados. I. Stolfi, Jorge. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Computação. III. Título.

Representação e manipulação exatas de mapas esféricos

Este exemplar corresponde à redação final da Tese devidamente corrigida e defendida por Marcus Vinícius Alvim Andrade e aprovada pela Banca Examinadora.

Campinas, 5 de Abril de 1999.

Jorge Stolfi (Orientador)

Tese apresentada ao Instituto de Computação, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Ciência da Computação.

Instituto de Computação
Universidade Estadual de Campinas

Representação e manipulação exatas de mapas esféricos

Marcus Vinícius Alvim Andrade[1]

Fevereiro de 1999

Banca Examinadora:

- Jorge Stolfi (Orientador)
- Marcelo Gattass
  Departamento de Ciência da Computação - PUC-Rio
- Paulo Feofiloff
  Instituto de Matemática e Estatística - USP
- Pedro Jussieu de Rezende
  Instituto de Computação - UNICAMP
- Cid Carvalho de Souza
  Instituto de Computação - UNICAMP
- Carlos Eduardo Ferreira (Suplente)
  Instituto de Matemática e Estatística - USP
- Ricardo Dahab (Suplente)
  Instituto de Computação - UNICAMP

[1]**Financiado em parte pelo programa PICDT/CAPES**

Abstract

In this dissertation we develop a tool kit for the exact representation and manipulation of *spherical maps* (maps on the sphere composed by arcs of circles, not necessarily geodesic ones), suitable for the implementation of geographical information systems (GIS).

Firstly, we describe the data structure SMC (*spherical maps by corners*) which we developed to represent the topology of spherical maps. It allows the representation of fairly general maps, including maps that have oval edges (not incident to any vertex), isolated vertices (not incident to any edge), and faces with multiple borders. We also define a set of topological operators to build, traverse and modify this structure.

Secondly, we define the *rational circles*, a dense subset of circles on the sphere $\mathbb{S}^2$ which can be exactly represented. Based on this concept, we develop an exact representation of points, circles and circular arcs on the sphere, such that the set of exactly representable points (*sub-rational points*) includes all points of intersection of two rational circles. We also develop exact algorithms for basic geometric operations with rational circles, including intersection, relative position, circular ordering of points on rational circles, and circular ordering of circles around a point.

Thirdly, we use these tools to develop exact algorithms for point location on spherical maps, and to compute the overlay of two spherical maps. We note that most geometric operations used in GIS (region intersection, point location, feature extraction, clipping etc) can be reduced to map overlay.

Finally, we show that the proposed tool kit is economical and efficient enough to be used as the basis for the implementation of a GIS.

All algorithms described in this text were implemented (in Modula-3) as a general-purpose library for the exact representation and manipulation of spherical maps.

Resumo

Neste trabalho desenvolvemos um conjunto de ferramentas para a representação e manipulação exatas de *mapas esféricos* (mapas sobre a esfera formados por arcos de círculos, não necessariamente máximos) adequados para a implementação de sistemas de informações geográficas (SIGs).

Na primeira parte deste trabalho, descrevemos a estrutura de dados SMC (*Spherical Maps by Corners*) para representar a topologia de mapas esféricos. Esta estrutura permite a representação de mapas bastante gerais, incluindo arestas ovais (não incidentes a nenhum vértice), vértices isolados (não incidentes a nenhuma aresta), e faces com múltiplas bordas. Definimos também um conjunto de operadores topológicos para construir, percorrer e modificar esta estrutura.

Na segunda parte, definimos os *circulos racionais*, um subconjunto denso dos círculos sobre a esfera $\mathbb{S}^2$ que podem ser representados de maneira exata. Baseados neste conceito, definimos representações exatas para pontos e arcos de círculos na esfera, sendo que o conjunto dos pontos representáveis exatamente (os pontos *sub-racionais*) inclui todos os pontos de interseção entre círculos racionais. Desenvolvemos também algoritmos exatos para as operações geométricas básicas sobre círculos racionais, incluindo interseção, posição relativa, ordenação de pontos sobre um círculo e ordenação de círculos em torno de um ponto.

Na terceira parte, baseados nos resultados descritos nas duas partes anteriores, desenvolvemos algoritmos exatos para localização de pontos num mapa esférico, e para sobreposição de dois mapas esféricos. Observamos também que boa parte das operações geométricas usadas em SIGs (por exemplo, interseção de regiões, localização de pontos, extração de detalhes, recortes) podem ser reduzidas a problemas de sobreposição.

Finalmente, mostramos que este conjunto de ferramentas é econômico e eficiente o bastante para servir de base para a implementação de SIGs.

Todos os algoritmos apresentados neste trabalho foram implementados (em Modula-3) na forma de uma biblioteca genérica para a representação e manipulação exatas de mapas esféricos.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer imensamente ao meu orientador Jorge Stolfi pelo constante estímulo, e principalmente pela dedicação a este trabalho (especialmente na forma de inúmeras leituras e correções), sem os quais seria impossível a sua conclusão.

A toda a minha família (meu saudoso pai, minha mãe, irmãos, avós, sogros, $\cdots$), um agradecimento muito especial pela interminável paciência e compreensão pelas minhas freqüentes ausências a vários eventos familiares importantes.

A todos os meus colegas de curso, em especial, aos meus amigos Mário, Fábio, Juliano e Nalvo, um muito obrigado pelos diversos momentos agradáveis desfrutados ao longo de todos estes anos. Agradeço também às amigas Anamaria e Helena, que além de colegas de curso são também orientandas do Prof. Stolfi, pelas freqüentes palavras de incentivo e pelas trocas de experiências que foram tão importantes para nos manter incentivados pelo trabalho.

Aos grandes amigos Pedro Henrique, Paulo, Sérgio e Erik, agradeço pela amizade e pela imensa hospitalidade nas minhas diversas vindas a Campinas. Aos amigos viçosenses, um eterno muito obrigado por terem sido por inúmeras vezes a inestimável "válvula de escape".

Aos colegas (professores e funcionários) do Departamento de Informática da UFV, o meu muito obrigado pela constante ajuda em diversos sentidos, e também por que não, por sempre tentarem me manter envolvido com o trabalho através da pergunta: "quando voce vai terminar a sua tese?".

A todos os professores e funcionários do Instituto de Computação da UNICAMP, agradeço pelo convívio amistoso e saudável, o que tornou ainda mais proveitoso estes anos de estudo e trabalho.

Por último, mas mais importante, gostaria de agradecer à minha amada esposa Flávia pela sua dedicação, paciência e abdicação, pois sem sombra de dúvidas ela é a principal responsável pela conclusão deste trabalho; por isso, a ela o meu sincero muito obrigado.

Dedicada à minha esposa Flávia

Índice

Abstract **v**

Resumo **vi**

Agradecimentos **vii**

1 Introdução **1**

1.1 Sobreposição de mapas . . . 2

1.2 Erros de arredondamento . . . 4

1.2.1 Consequências dos erros de arredondamento . . . 4

1.2.2 Soluções propostas . . . 5

1.2.3 Computação exata . . . 7

1.3 Objetivos do trabalho . . . 8

1.4 Estrutura da dissertação . . . 8

2 Topologia dos mapas bidimensionais **10**

2.1 Definição de mapa . . . 10

2.2 Vizinhanças canônicas . . . 14

2.3 Incidência entre os elementos . . . 15

2.4 Orientação . . . 15

2.4.1 Orientação dos elementos . . . 16

2.5 Característica de Euler . . . 17

2.6 Mapas esféricos . . . 19

3 As esquinas de um mapa esférico **20**

3.1 Definição de esquinas . . . 20

3.2 Função Sym . . . 22

3.3 Propriedades das esquinas . . . 23

3.4 Funções de percurso . . . 23

3.4.1 A função $Onext$ . . . 23

3.4.2 A função *Lnext* 24

4 Representação da topologia de mapas esféricos **27**
4.1 A estrutura de dados SMC 27
4.2 Informações não topológicas 28
4.3 Operadores de criação 30
4.4 Operador de transferência 33
4.5 Operadores de conexão e desconexão 36
4.5.1 Junção e divisão de vértices e bordas 36
4.5.2 O operador JoinVerticesJoinBorders 38
4.5.3 O operador SplitVertexSplitBorder 38
4.5.4 O operador JoinVerticesSplitBorder 39
4.5.5 O operador SplitVertexJoinBorders 41
4.5.6 Complexidade dos operadores de conexão e desconexão 42
4.5.7 Invertibilidade dos operadores de conexão e desconexão 42
4.6 Suficiência dos operadores topológicos 43
4.7 Operadores auxiliares 43
4.7.1 O operador BreakEdge 43
4.7.2 O operador Connect 45

5 Geometria projetiva orientada **47**
5.1 Pontos 48
5.2 Planos 48
5.3 Retas 50
5.4 Operações *junção* e *encontro* 50
5.5 Fórmulas algébricas 52
5.6 Coeficientes de Plücker de uma reta 52
5.7 Orientações relativas 54
5.7.1 Posição relativa de dois pontos em relação a uma reta 54
5.7.2 Posição relativa de dois planos em relação a uma reta 55
5.7.3 Posição relativa de três pontos num plano 55
5.7.4 Posição relativa de duas retas 56
5.8 Ordenação cíclica 56
5.8.1 Ordenação cíclica de três pontos em relação a uma reta 56
5.8.2 Ordenação cíclica de três planos em torno de uma reta 57
5.9 A esfera $\mathbb{S}^2$ 57
5.10 Polaridade na esfera 58

6 Geometria na esfera **63**
6.1 Mapas esféricos . . . 63
6.2 Círculos sobre $\mathbb{S}^2$ . . . 63
6.3 Elementos de um S-círculo . . . 65
6.4 Arcos de S-círculos . . . 66
6.5 Operações envolvendo S-círculos . . . 67
6.5.1 Posição de um ponto de $\mathbb{S}^2$ em relação a um S-círculo . . . 67
6.5.2 Interseção canônica entre dois S-círculos . . . 67
6.5.3 Ponto diametralmente oposto num S-círculo . . . 69
6.5.4 Posição relativa de dois pontos sobre um S-círculo . . . 69
6.5.5 Ordenação cíclica de três pontos sobre um S-círculo . . . 70
6.6 Ordenação cíclica de três S-círculos em torno de um ponto . . . 73
6.7 P-círculos . . . 74
6.8 Projeção estereográfica . . . 75

7 Geometria exata na esfera **77**
7.1 Pontos racionais . . . 77
7.2 Pontos de $\mathbb{S}^2$ representáveis exatamente . . . 78
7.2.1 Aproximação de pontos genéricos por pontos de $\mathcal{B}$ . . . 78
7.2.2 Aproximação de pontos genéricos por pontos de $\mathcal{A}$ . . . 80
7.3 Planos e S-círculos racionais . . . 81
7.3.1 Construção de um S-círculo racional com centro em $\mathcal{B}$ . . . 81
7.4 Aproximação racional de S-círculos genéricos . . . 83
7.5 P-círculos racionais . . . 85

8 Interseção exata de S-círculos **86**
8.1 Interseção entre S-círculos pela reta em comum aos planos de suporte . . . 86
8.2 Pontos sub-racionais de $\mathbb{S}^2$ . . . 88
8.3 Representação computacional . . . 92
8.3.1 Representação canônica dos pontos de $\mathcal{C}$ . . . 92
8.3.2 Algoritmos para obtenção da representação canônica . . . 93
8.3.3 Representação da geometria na estrutura SMC . . . 95

9 Operações exatas com pontos de $\mathcal{C}$ **96**
9.1 Posição de um ponto de $\mathcal{C}$ em relação a um plano racional . . . 96
9.2 Ponto diametralmente oposto num S-círculo . . . 98
9.3 Posição relativa de dois pontos sobre um S-círculo . . . 99
9.4 Ordenação cíclica de três pontos de $\mathcal{C}$ sobre um S-círculo . . . 101
9.5 Ordenação cíclica de três S-círculos em torno de um ponto . . . 101

9.6 Algoritmo para verificar se um ponto pertence a uma S-curva 102

10 Localização de um ponto num mapa **104**
10.1 O conceito de endereço 104
10.2 Localização absoluta 105
10.2.1 Obtenção de um ponto de referência 105
10.2.2 Obtenção de um caminho de referência 105
10.2.3 Percorrendo o caminho de referência 106
10.3 Localização relativa 107
10.3.1 Endereço de um S-vetor 107
10.3.2 Algoritmo LocateRel 107
10.3.3 O procedimento WhereTo 109
10.3.4 O procedimento TestEdgeCorner 110
10.3.5 O procedimento TestVertexCorner 111
10.3.6 O procedimento ClosestEdgeExit 112
10.3.7 O procedimento ClosestFaceExit 113
10.4 Complexidade do algoritmo Locate 115
10.5 O algoritmo FarthestFaceExit 116

11 Sobreposição de mapas **118**
11.1 Mapas algébricos 119
11.2 Um algoritmo incremental de sobreposição 119
11.3 Inclusão de um ponto no mapa 120
11.4 Inclusão de uma S-curva num mapa 121
11.4.1 O procedimento OverlayArc 121
11.4.2 O procedimento OverlayOval 122
11.4.3 O procedimento LocalOverlayArc 124
11.4.4 O procedimento InsertArc 125
11.4.5 O procedimento InsertOval 127
11.4.6 O procedimento DistributeBorders 127
11.5 Complexidade do algoritmo de sobreposição 128
11.6 Uma versão mais eficiente de LocalOverlayArc 129

12 Conclusões e trabalhos futuros **131**
12.1 Precisão *versus* números de bits 131
12.2 Eficiência dos algoritmos 132
12.3 Trabalhos futuros 133

A Conceitos básicos de topologia **134**
A.1 Espaço topológico; abertos e fechados . . . 134
A.2 Subconjuntos fechados . . . 134
A.3 Sub-espaços . . . 135
A.4 Produto cartesiano . . . 135
A.5 Topologia natural de $\mathbb{R}^n$ . . . 135
A.6 Vizinhança . . . 135
A.7 Ponto de acumulação . . . 136
A.8 Fecho, interior, e fronteira . . . 136
A.9 Espaço quociente . . . 136
A.10 Separabilidade . . . 136
A.11 Continuidade . . . 137
A.12 Equivalência topológica . . . 137

B Implementação **138**
B.1 Módulo SMTop . . . 139
B.2 Módulo SMGeo . . . 139
B.3 Módulo SMap . . . 139

Bibliografia **140**

Lista de Figuras

1.1 Exemplos de mapas esféricos 2
1.2 A sobreposição de dois mapas 3
1.3 Interseção de polígonos: hachurado ("interior"); branco ("exterior"). 3

2.1 Exemplo de multi-disco e suas margens. 12
2.2 Exemplos de mapas bidimensionais. 13
2.3 Exemplos de subdivisões que não são mapas bidimensionais. 14
2.4 Incidência entre margens e componentes da fronteira de uma face. 15
2.5 Orientações internas (ou longitudinais) e externas (ou transversais) de uma aresta. 16
2.6 As quatro orientações de uma aresta: (a) e (d) orientações totais positivas; (b) e (c) orientações totais negativas. 17

3.1 Apenas as relações de incidência não são suficientes para descrever a topologia de um mapa. 21
3.2 Esquinas de um mapa. 22
3.3 Exemplos da função *Onext*. 24
3.4 Exemplo da função *Lnext*. 25
3.5 Exemplo das funções *Onext*, *Lnext* e *Bord*. 26

4.1 Estrutura de dados SMC. 29
4.2 Ilustração da estrutura SMC. 30
4.3 Operador MakeFace 31
4.4 Operador MakeVertex 31
4.5 Operador MakeArcEdge 32
4.6 Operador MakeOvalEdge 33
4.7 Operador topológico de transferência: Transfer(b, g) 34
4.8 Resultado de Transfer(b, g) quando b e g são elementos de um mesmo mapa e a face g está na parte da esfera à direita da borda b. 35
4.9 Junção e divisão de vértices 37
4.10 Junção e divisão de bordas 37

4.11 Operador JoinVerticesJoinBorders(c_1, c_2). 38
4.12 Operadores SplitVertexSplitBorder(c_1, c_2). 39
4.13 Operador JoinVerticesSplitBorder(c_1, c_2, f_1, f_2). 40
4.14 Operador SplitVertexJoinBorders(c_1, c_2, f). 41
4.15 OperadorBreakEdge 44
4.16 Operador Connect 45

5.1 Orientações (externa e interna) de um plano. 49
5.2 Orientações (externa e interna) de uma reta. 50
5.3 Operações *junção* e *encontro* (parte no aquém): (a) $p \vee q$; (b) $p \vee l$; (c) $\alpha \wedge \beta$; (d) $l \wedge \alpha$. 51
5.4 Retas positivamente orientadas. 56
5.5 Ordem cíclica de três pontos ao longo de uma reta: (a) $\otimes_l(p, q, r) = +1$; (b) $\otimes_l(p, q, r) = -1$; (c) $\otimes_l(p, q, r) = 0$. 57
5.6 Ordem cíclica de três planos em torno de uma reta: (a) $\otimes_l(\alpha, \beta, \gamma) = +1$; (b) $\otimes_l(\alpha, \beta, \gamma) = -1$; (c) $\otimes_l(\alpha, \beta, \gamma) = 0$. 58
5.7 Polaridade esférica: (a) Ponto-Plano; (b) Reta-reta. 61

6.1 Um S-círculo 64
6.2 Elementos de um S-círculo 65
6.3 O S-arco $(p, \overset{\frown}{c}, q)$. 66
6.4 Interseção canônica entre dois S-círculos. 68
6.5 Ponto diametralmente oposto a p no S-círculo c. 69
6.6 Definição de $\otimes_c(p, q)$: (a) $\otimes_c(p, q) = +1$; (b) $\otimes_c(p, q) = -1$. 70
6.7 Ordenação cíclica de três pontos sobre um S-círculo: (a) $\otimes_c(p, q, r) = +1$; (b) $\otimes_c(p, q, r) = -1$. 71
6.8 Assinatura de um ponto relativa ao triângulo pqr e ao plano α. 71
6.9 Ordem cíclica de três S-círculos em torno de um ponto em comum: (a) $\otimes_p(a, b, c) = +1$; (b) $\otimes_p(a, b, c) = -1$; (c) $\otimes_p(a, b, c) = 0$. 73
6.10 Projeção estereográfica canônica. 75

7.1 Distância d entre o ponto $\eta\vec{u}$ e a reta Oq. 79

8.1 Interseção entre dois S-círculos e entre os seus planos de suporte. 87
8.2 Os pontos $ent(l)$, $mid(l)$ e $ext(l)$. 87
8.3 Definição em Modula-3 da representação geométrica. 94

9.1 Posição de um ponto de $\mathcal{C}$ em relação a um plano racional. 97
9.2 Um corte de $\mathbb{S}^2$ paralelo ao plano $spln(c)$. 98
9.3 Cálculo do predicado $\otimes_c(p, q)$. 100

10.1 Endereços (h, c) do S-vetor (p, s): (1) h é uma face; (2) h é uma aresta; (3) h é um vértice. 108
10.2 Casos a serem tratados pelo procedimento TestEdgeCorner. 110
10.3 Alguns casos a serem tratados pelo procedimento ClosestEdgeExit: (i) B é um S-círculo completo; (ii) A é um S-círculo menos um ponto; (iii) e (iv) A e B são arcos ordinários. 112
10.4 Resultado do procedimento ClosestFaceExit. 114
10.5 Exemplos do pior caso do procedimento ClosestFaceExit. 116

11.1 Sobreposição de dois mapas. 119
11.2 Decomposição de um mapa em mapas elementares. 120
11.3 Resultado do procedimento InsertArc. 126
11.4 Na distribuição das bordas não basta localizar o ponto p em relação ao S-círculo de suporte da nova aresta. 128
11.5 Pior caso do algoritmo de sobreposição. 129

B.1 Arquitetura do sistema para representação e manipulação exatas de mapas esféricos. 138

Capítulo 1

Introdução

Nos últimos anos, o desenvolvimento de *Sistemas de Informações Geográficas* (SIGs) tem atraído a atenção de pesquisadores de diversas áreas tais como geometria computacional, computação gráfica, banco de dados, engenharia de software, dentre outras. De um modo geral, um SIG é um sistema automatizado utilizado para armazenar, analisar e manipular dados geográficos, ou seja, dados que representam objetos e fenômenos em que a localização geográfica é uma característica inerente à informação e indispensável para analisá-la. Tais sistemas comportam diferentes tipos de dados e aplicações, como por exemplo, otimização de tráfego, controle cadastral, gerenciamento de serviços de utilidade pública, demografia, cartografia, administração de recursos naturais, monitoramento costeiro, etc [6, 5, 25]. Nosso objetivo neste trabalho é abordar os aspectos de geometria computacional envolvidos na representação e manipulação de mapas em SIGs.

Uma importante característica dos SIGs é que eles possibilitam a integração, numa única base de dados, de informações geográficas provenientes de fontes diversas tais como dados cartográficos, dados de censo e cadastro urbano e rural, imagens de satélites e modelos numéricos de terreno. Em outras palavras, os SIGs são utilizados para representar tanto informações globais (referentes ao planeta) como informações locais (referentes a uma região limitada, como um estado, uma cidade, etc). Em geral, devido à complexidade de se trabalhar com a forma real da Terra, mapas globais são modelados sobre uma esfera, e mapas locais sobre um plano. Entretanto, visto que é necessário integrar estes dois tipos de dados, é fundamental que eles estejam representados de maneira consistente. Portanto, é conveniente representar internamente todos os dados geográficos, mesmo que em escalas pequenas, como mapas na superfície de uma esfera; não só por esta ser a representação mais natural, mas também porque assim evita-se a necessidade da realização de transformações na integração de diferentes mapas locais, casos estes fossem expressos em relação a diferentes planos de projeção.

Desta forma, vamos considerar neste trabalho apenas mapas sobre a esfera $\mathbb{S}^2$. Além disso, vamos também nos limitar a mapas cujas linhas e fronteiras são compostas por arcos de círculos (não necessariamente máximos), os quais denominamos *mapas esféricos*. Por exemplo, veja a figura 1.1.

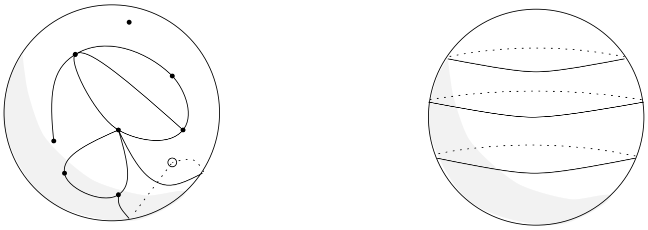


Figura 1.1: Exemplos de mapas esféricos

Vale notar que os mapas genéricos utilizados em SIGs usam uma grande variedade de modelos (não necessariamente esféricos) para a representar a superfície da Terra; mas, desde que tais mapas definam uma latitude e uma longitude nominais para cada ponto, eles podem ser internamente interpretados de maneira automática como mapas esféricos, sendo que esta representação interna não precisa ser visível para o usário.

Os mapas esféricos surgem naturalmente quando representamos grades de latitude-longitude, imagens de satélites, áreas de alcance e influência, etc (vide [25]). Em particular, a projeção estereográfica de mapas planares com arestas retilíneas ou circulares resulta sempre num mapa esférico e vice-versa.

Obviamente, existem mapas cujas linhas não são arcos de círculo; por exemplo, curvas de nível, isotermas, isobáricas, rios e fronteiras políticas. Outro exemplo são as curvas *loxodrômicas*, que descrevem a trajetória de um navegador que navega sempre numa mesma direção fixa da bússula. No entanto, curvas arbitrárias podem ser adequadamente aproximadas por uma sequência de arcos de círculos, com erro de aproximação de segunda ordem.

1.1 Sobreposição de mapas

Uma operação particularmente importante neste contexto é a operação de sobreposição de dois mapas esféricos A e B, denotada por $A \oplus B$. Informalmente, o mapa $A \oplus B$ é a partição da esfera de acordo com os dois mapas combinados. Vale notar que cada elemento (vértice, aresta ou face) e de $A \oplus B$ está contido num único elemento $\alpha(e)$ de A e num único elemento $\beta(e)$ de B. Por exemplo, veja a figura 1.2.

A importância deste conceito decorre do fato que muitas das operações envolvendo mapas podem ser reduzidas a operações de sobreposição [10]. Por exemplo, um polígono pode ser representado por um mapa onde cada elemento é rotulado como “interior” ou

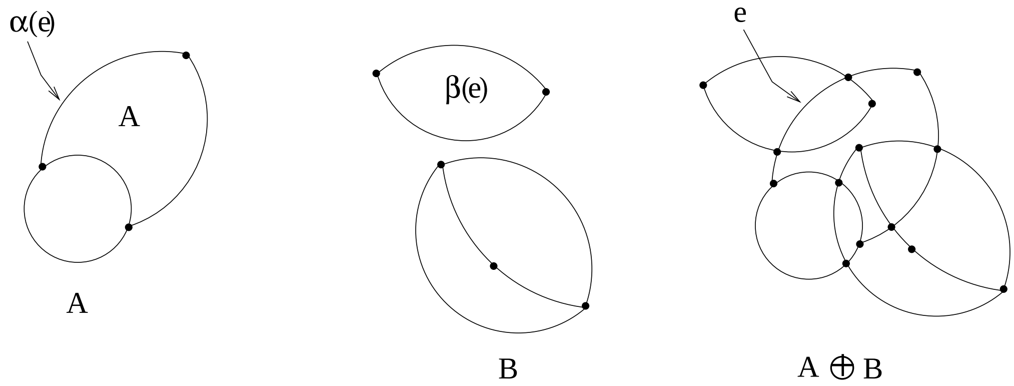


Figura 1.2: A sobreposição de dois mapas

"exterior". Neste caso, a interseção de dois polígonos A e B pode ser facilmente determinada da seguinte forma: primeiro construímos a sobreposição $C = A \oplus B$, sendo que todo o elemento e de C é rotulado de "interior" se e somente se $\alpha(e)$ e $\beta(e)$ são também rotulados "interior" nos seus respectivos mapas. Os demais elementos de C são rotulados "exterior". Feito isso, basta eliminar do mapa C todas as arestas que separam duas faces com o mesmo rótulo, e todos os vértices que não são pontas de nenhuma aresta. Veja a figura 1.3.

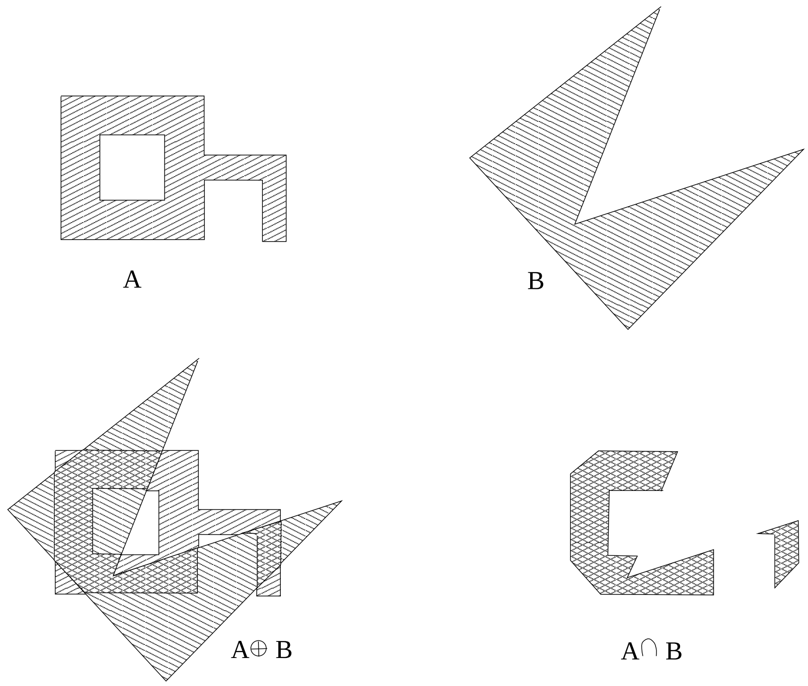


Figura 1.3: Interseção de polígonos: hachurado ("interior"); branco ("exterior").

Note que esta mesma estratégia pode ser usada para obter a união ou a subtração de dois polígonos: a etapa mais complicada — calcular o mapa $C = A \oplus B$ — é exatamente a mesma, muda apenas o critério de rotulação dos elementos de C.

Um outro exemplo que ilustra a versatilidade da operação de sobreposição é o seguinte: suponha que temos um mapa geográfico A no qual as cidades são representadas por vértices, e queremos determinar todas as cidades cuja distância de um ponto p é menor do que r. Para isto, construímos primeiro um mapa B que consiste de um disco D de centro em p e raio r (medido sobre a esfera), e computamos a sobreposição $C = A \oplus B$. Daí, as cidades desejadas são os vértices v do mapa C tais que $\beta(v)$ é o disco D.

1.2 Erros de arredondamento

Tradicionalmente, os cálculos geométricos em SIGs (assim como em diversas outras aplicações numéricas) são efetuados com uma precisão fixa — em geral, com números em ponto flutuante. Portanto, estes cálculos estão sujeitos a imprecisões numéricas provenientes de várias fontes.

Em primeiro lugar, os dados brutos são freqüentemente representados na base decimal, enquanto que nas máquinas eles são codificados em binário. Geralmente, a conversão de decimal para binário (e vice-versa) implica em erros. Por exemplo, o número decimal 0.6 equivale, em binário, à dízima periódica $0.10011001\cdots$; por outro lado, o número 2^{-50} tem 35 algarismos decimais significativos.

Além disso, o resultado exato de uma operação aritmética envolvendo dois números a e b em geral requer mais bits do que a e b (às vezes um número infinito). Por isso a representação do resultado da operação é freqüentemente arredondada. Por exemplo, com uma mantissa de 5 dígitos, o produto $0.24665 \cdot 0.63994 = 0.1578412010$ não pode ser representado exatamente e tem que ser arredondado para 0.15784, o que implica num erro de aproximadamente $1.2 \,.\, 10^{-6}$.

Finalmente, por razões de eficiência, diversas funções, como por exemplo, log, sin, cos, $\cdots$, em geral, são determinadas de maneira aproximada utilizando-se séries finitas ou aproximações racionais.

1.2.1 Consequências dos erros de arredondamento

Infelizmente, uma das áreas mais sensíveis aos problemas de erros de arredondamento é a área de geometria computacional [39, 38, 1, 21, 5]. A experiência mostra que se os erros de arredondamento não são levados em consideração e tratados de maneira adequada, a implementação de algoritmos geométricos fica freqüentemente sujeita a falhas, em geral catastróficas. Isto porque na maioria das vezes, os problemas nesta área envolvem tanto um conjunto de dados numéricos, que descrevem a forma (a geometria) dos objetos, quanto um conjunto de dados simbólicos que descrevem o relacionamento entre os elementos que compõem o objeto (isto é, sua topologia). Nestes casos, os erros de arredondamento freqüentemente tornam inconsistentes estas duas representações de um mesmo objeto. Por exemplo, a representação topológica de uma figura pode requerer que três retas se interceptem num mesmo ponto. No entanto, se os coeficientes destas três retas são representados por números em ponto flutuante, então a computação da interseção entre cada par de retas pode resultar em três pontos distintos, ao invés de um único ponto.

Estas inconsistências têm efeitos bastante drásticos em algoritmos geométricos porque a maioria destes algoritmos se baseiam em testes de predicados topológicos e, dependendo do resultado, executam uma ou outra seqüência de operações. Portanto, em algoritmos envolvendo longas seqüências de testes desse tipo, os erros de arredondamento podem levar a um resultado final totalmente inconsistente e imprevisível; e a probabilidade de que isto ocorra pode ser inaceitavelmente alta, mesmo que a probabilidade de falha em cada teste seja pequena.

Vale notar que a causa essencial desta dificuldade é que geralmente os algoritmos são elaborados considerando-se um modelo numérico contínuo. Quando, estes algoritmos (corretos do ponto de vista teórico) são implementados utilizando números em precisão fixa, muitas das propriedades essenciais para sua corretude deixam de ser válidas.

1.2.2 Soluções propostas

Uma das propostas mais simples para tentar amenizar estes problemas é a adocão de uma *tolerância* ϵ, de tal forma que dois valores cuja diferença é menor do que ϵ são considerados iguais. Por exemplo, se a distância entre um ponto p e uma reta r é menor do que ϵ, então considera-se que p é incidente em r. Como descrito por Hoffmann [20, sec. 4.2], existem diversas situações (freqüentes na prática) onde esta abordagem ainda nos leva a inconsistências. Na verdade, o que este método consegue é, no máximo, adiar o problema, diminuindo a probabilidade de sua ocorrência.

Uma outra proposta é tentar *ajustar a geometria* para que ela fique consistente com a topologia. Por exemplo, dadas três retas r_1, r_2 e r_3 que devem passar por um mesmo ponto, podemos calcular (em geral, de maneira aproximada) o ponto de interseção p entre r_1 e r_2, e depois ajustar r_3 de modo que ela efetivamente passe por p. Desta forma, a geometria fica consistente com a topologia (as retas passam por um mesmo ponto). O problema com este método é que pode ser bastante complicado determinar o ajuste adequado; ou, até mesmo, pode ser que não exista um ajuste adequado. Por exemplo, sejam os pontos $p = r_1 \cap r_2$ e $q = r_1 \cap r_3$; os erros de arredondamento podem fazer com que p seja incidente a r_3, mas q não seja incidente a r_2. Desta forma, se ajustarmos a reta r_2 de modo que ela passe pelo ponto q, então pode ser que o "novo" ponto $r_1 \cap r_2$ não seja mais incidente a r_3.

Uma proposta alternativa é tentar *ajustar a topologia* para que ela fique consistente com a geometria. Ou seja, a idéia neste caso é assumir os erros de arredondamento e alterar a representação topológica para que ela reflita tais erros. Por exemplo, dados três pontos colineares p_1, p_2 e p_3, seja r a reta passando por p_1 e p_2; se (por causa dos erros de arredondamento) esta reta não contém o ponto p_3, então, ajustamos a topologia de modo a dizer que p_3 não é colinear com p_1 e p_2. O problema com esta abordagem é que podem ocorrer situações em que não há nenhuma topologia consistente com a geometria. Por exemplo, no caso das três retas r_1, r_2 e r_3 visto acima, não há como ajustar a topologia para satisfazer a "geometria" resultante dos erros de arredondamento (pois $r_1 \cap r_2$ está em r_3, mas $r_2 \cap r_3$ não está em r_1).

Uma proposta que objetiva contornar o problema descrito no parágrafo anterior consiste em tentar reestruturar o algoritmo de modo a *eliminar predicados redundantes*. Desta forma, os testes geométricos efetuados sempre seriam consistentes com algum modelo topológico. Por exemplo, considerando o caso das três retas descrito acima, se um teste geométrico indica que o ponto $r_1 \cap r_2$ é incidente à reta r_3, então o algoritmo deve supor, por definição, que a interseção entre r_1 e r_3 está em r_2 (sem que este fato nunca seja explicitamente verificado). No entanto, a grande dificuldade desta abordagem é a determinação de todas as relações de dependência entre os predicados, pois em geral, esta tarefa é extremamente complexa, senão insolúvel.

Adicionalmente, há trabalhos que propõem *modificar a topologia e a geometria* simultaneamente, de modo a torná-las consistentes (incorporando os erros de arredondamento). Por exemplo, suponha novamente o caso de três retas r_1, r_2 e r_3 que deveriam ser concorrentes. Se, devido a erros de arredondamento, o ponto $p = r_1 \cap r_2$ não é incidente na reta r_3, então esta reta é "quebrada" e substituída por duas semi-retas r_3' e r_3'', ambas com origem no ponto p. Na literatura este método é conhecido com o nome de *arredondamento geométrico*, e tem sido aplicado com relativo sucesso no caso de arranjos de segmentos de retas no plano [15, 27]. Entretanto, sua extensão a objetos mais complexos ainda é um problema em aberto. Além disso, resta o problema de que muitas aplicações não toleram quaisquer pertubações topológicas, o que invabiliza a aplicação deste método.

Finalmente, há também o método de *análise de erros* que consiste em mostrar (utilizando métodos de análise numérica e álgebra linear) que a solução obtida através de uma determinada implementação de um algoritmo é "adequadamente" próxima da solução teoricamente correta. Uma dificuldade imediata desta abordagem é que os resultados (topológicos) de um algoritmo geométrico dependem de maneira descontínua dos dados de entrada. Para contornar esta dificuldade Guibas, Salesin e Stolfi [17] desenvolveram a *geometria epsilon*, que utilizando o conceito de *análise inversa de erros* [37] determina a pertubação máxima que deve ser aplicada aos dados de entrada para que resultado obtido seja a solução exata para aquela entrada pertubada. O principal problema desta abordagem é que a análise necessária fica intratável, mesmo para problemas relativamente simples, e leva a algoritmos muito ineficientes.

Concluindo, apesar de todos os esforços investidos nos últimos 20 anos, na prática, todos os métodos descritos acima, que visam tornar robustos os algoritmos geométricos implementados com aritmética de precisão fixa, ainda estão restritos a algumas poucas aplicações específicas.

1.2.3 Computação exata

Diante destes fatos, atualmente o sentimento de grande parte da comunidade que tem trabalhado nesta área [5, 21, 39] é de que, exceto em situações muito específicas, é impraticável desenvolver algoritmos geométricos robustos dentro do paradigma de precisão fixa. Para alcançar a robustez de forma consistente, é fundamental trabalhar no *paradigma da computação exata*, que consiste em representar de maneira exata todos os valores numéricos e determinar, também de maneira exata, todos os predicados geométricos.

Vale notar que, em geral, este paradigma exige a utilização de uma representação numérica com precisão arbitrária, ou pelo menos, com uma precisão maior do que a fornecida pelas instruções da máquina. Certamente, esta é a principal desvantagem do paradigma de computação exata, pois este fato aumenta consideravelmente o tempo de processamento dos algoritmos em relação à implementação com precisão fixa. No entanto, é importante observar que não faz muito sentido comparar estes dois custos, pois no caso da precisão fixa, troca-se correção por velocidade; ou seja, para se ganhar tempo não se computa a resposta correta do problema e sim uma resposta aproximada. Em muitas aplicações, o custo de uma solução incorreta, mesmo que ocasional, é muitas vezes maior do que o custo adicional da aritmética exata.

Além disso, nos últimos anos, a velocidade das máquinas tem aumentado de tal forma que o tempo de processamento (eficiência do código) é cada vez menos importante do que o tempo de desenvolvimento dos programas. Portanto, visto que há uma certa sobreoferta de ciclos de máquina, é em geral razoável investir parte destes ciclos para se ter a certeza de que a solução obtida para o problema é sempre uma solução correta.

Concluindo, existe hoje em dia um crescente interesse por ferramentas e algoritmos baseados no paradigma de computação exata. Este interesse se justifica principalmente porque à medida que novas ferramentas (exatas) forem colocadas à disposição dos usuários, estes poderão escolher a solução que melhor os satisfazem, optando entre rapidez e confiabilidade.

1.3 Objetivos do trabalho

Diante destas observações, vamos estabelecer como nosso objetivo principal o desenvolvimento de uma representação para mapas esféricos, e um conjunto de operadores básicos suficientes para computar a sobreposição destes mapas. Além disso, considerando todos os inconvenientes do modelo de precisão fixa, optamos por desenvolver esta representação e operações dentro do paradigma de computação exata. Resumindo, nosso objetivo é desenvolver uma representação exata de mapas esféricos, e um algoritmo também exato para a sobreposição destes mapas.

É importante frisar que, do ponto de vista de SIGs, há erros que são intrínsecos do processo de coleta de dados devido a imprecisões dos instrumentos, aproximação da superfície terrestre por uma esfera perfeita, aproximação de curvas gerais por arcos de círculos, projeções cartográficas, etc. Portanto, numa primeira etapa, vamos supor a realização de um processo de arredondamento para adequar os dados de entrada transformando-os em mapas esféricos representados exatamente de acordo com o nosso modelo. Uma vez efetuada esta transformação, os algoritmos descritos neste trabalho permitem manipular estes mapas de maneira exata.

Vale ressaltar que vamos abordar estes problemas tanto do ponto de vista teórico quanto do ponto de vista prático; ou seja, além de descrever matematicamente a representação e os algoritmos exatos, nosso objetivo inclui também a implementação destes algoritmos, na forma de uma biblioteca de rotinas genéricas e robustas para a representação e manipulação de mapas na esfera.

1.4 Estrutura da dissertação

Esta dissertação pode ser dividida em três partes: na primeira (capítulos 2 a 4), tratamos das questões envolvendo a topologia dos mapas esféricos; na segunda (capitulos 5 a 9), abordarmos os problemas relacionados à geometria destes mapas; e finalmente, na terceira (capítulos 10 e 11), tratamos dos problemas envolvendo um mapa como um todo (topologia e geometria).

Mais especificamente, no capítulo 2, definimos o conceito topológico de mapas bidimensionais, dos quais os mapas esféricos são um caso particular; no capítulo 3, definimos uma formulação combinatória para a topologia dos mapas esféricos; e no capítulo 4, definimos uma estrutura de dados para representar estes mapas e um conjunto de operadores topológicos que nos permitem manipular esta estrutura.

No que diz respeito à geometria dos mapas esféricos, apresentamos inicialmente, no capítulo 5, um breve resumo de alguns conceitos de geometria projetiva orientada (no espaço tridimensional). No capítulo 6, descrevemos uma representação analítica da geometria dos mapas esféricos e as operações básicas necessárias para a manipulação da mesma. Nos capítulos 7 e 8 descrevemos uma representação exata para esta geometria, e no capítulo 9, descrevemos os algoritmos exatos para as operações geométricas definidas no capítulo 6.

Baseados nas ferramentas topológicas e geométricas definidas nos capítulos anteriores, apresentamos, no capítulo 10, um algoritmo exato para localizar um ponto num mapa, e no capítulo 11, um algoritmo também exato de sobreposição de dois mapas.

Finalmente, no capítulo 12, apresentamos algumas observações sobre aplicações práticas destas técnicas e também algumas linhas de trabalhos (futuros) que merecem uma investigação mais detalhada. Além disso, no apêndice A, apresentamos um breve resumo de alguns conceitos topológicos utilizados neste trabalho e no apêndice B, descrevemos alguns detalhes da implementação da representação e dos algoritmos que foram descritos neste trabalho.

Para manter a compatibilidade entre este texto e os artigos (escritos em inglês) e os programas dele derivados, as funções e os procedimentos descritos neste texto serão denominados utilizando palavras da língua inglesa.

Capítulo 2

Topologia dos mapas bidimensionais

Conforme vimos no capítulo anterior, nosso objetivo neste trabalho é estabelecer uma representação de mapas que permita que a geometria destes mapas seja representada exatamente (sem erros de arredondamento) e que seja fechada para a operação de sobreposição.

Para alcançarmos tal objetivo, nosso primeiro passo será definir o conceito de mapas que pretendemos considerar, e descrever um método (uma estrutura de dados) que permita a representação destes mapas. Mais especificamente, neste capítulo vamos tratar das questões relacionadas à representação da topologia dos mapas, isto é, das relações de incidência entre os seus componentes (vértices, arestas e regiões).

Vale ressaltar que as questões relacionadas à representação da geometria serão abordadas nos próximos capítulos.

No que se segue, vamos supor conhecidos certos conceitos elementares de topologia de conjuntos. Em particular, vamos usar os conceitos de *espaço topológico*, *conjunto aberto* e *fechado*, *variedade topológica*, conjunto *conexo*, *vizinhança* de um ponto, *fecho*, *interior* e *fronteira* de um conjunto. Vamos utilizar também os conceitos de *homeomorfismo* (ou *equivalência*) entre dois espaços topológicos e *orientação* de uma variedade. De modo geral, tais conceitos serão utilizados de forma bastante elementar, e os leitores que já tiveram algum contato com os mesmos não devem ter dificuldades de acompanhar as discussões a seguir. Em todo caso, no apêndice A incluímos definições sucintas desses conceitos.

2.1 Definição de mapa

Informalmente, um mapa é uma subdivisão de uma superfície num número finito de elementos: pontos (*vértices*), curvas (*arestas*) e regiões bidimensionais (*faces*), tal que a fronteira exterior de um elemento de dimensão d é a união de elementos de dimensão menor do que d. Isto é, a fronteira exterior de uma aresta é um conjunto finito de vértices; a fronteira exterior de uma face é a união de vértices e arestas.

Geralmente, para simplificar os algoritmos de manipulação de mapas, são impostas certas restrições sobre a topologia dos elementos de um mapa. Por exemplo, algumas restrições frequentes são: não permitir vértices isolados (que não sejam incidentes a nenhuma aresta), não permitir arestas que sejam curvas fechadas e não permitir faces com buracos. Normalmente, para contornar tais restrições adota-se o conceito de *elementos fictícios* que são introduzidos artificialmente no mapa para impedir que tais restrições sejam violadas.

No entanto, este tipo de solução apresenta alguns inconvenientes, pois os algoritmos de manipulação de mapas se tornam muito mais complexos, uma vez que os elementos fictícios devem ser ignorados, o que implica que o algoritmo deve tratar diversos casos especiais; e pior ainda, não há um método determinístico de inclusão de elementos fictícios no mapa, o que torna a categorização de mapas (por exemplo, a verificação de que dois mapas são isomorfos) um processo extremamente complexo.

Para contornar estes inconvenientes, vamos a seguir apresentar uma definição de mapas bidimensionais que não impõe os tipos de restrições citadas acima, tornando desnecessária a inclusão de elementos fictícios.

Para $n > 0$, seja $\mathbb{S}^n$ a superfície da esfera n-dimensional de raio 1 centrada na origem de $\mathbb{R}^n$. Vamos considerar a esfera $\mathbb{S}^n$ como um espaço topológico, com a topologia usual (induzida pela topologia padrão do $\mathbb{R}^n$). Vamos também supor definida uma *orientação canônica* para $\mathbb{S}^n$. Em particular, definimos a orientação canônica do círculo $\mathbb{S}^1$ como sendo o sentido de percurso anti-horário; e a orientação canônica da esfera $\mathbb{S}^2$ como sendo o sentido anti-horário visto do lado de fora da esfera. Em ambos os casos, supomos que os eixos estão dispostos da maneira usual. Desta forma,

Definição 1 Uma *oval* é um espaço topológico homeomorfo a $\mathbb{S}^1$.

Em outras palavras, uma oval é uma curva simples fechada (também conhecida como curva de Jordan); por exemplo, um círculo no plano.

Definição 2 Um *arco* é um espaço topológico homeomorfo à reta real $\mathbb{R}$. Um ponto qualquer de um arco e divide esse arco em dois outros arcos disjuntos denominados *pontas* de e.

Definição 3 Um *curva* é uma oval ou um arco.

Definição 4 Um *disco aberto* é um espaço topológico homeomorfo ao interior do círculo unitário (círculo centrado na origem com raio 1) de $\mathbb{R}^2$. Um *disco fechado* é um espaço topológico homeomorfo ao círculo unitário mais o seu interior.

Note que um disco aberto é homeomorfo ao plano $\mathbb{R}^2$.

Definição 5 Um *raio* de um disco D é um arco contido em D com um extremo na fronteira de D e outro no interior de D. Um *diâmetro* de um disco D é um arco contido em D com ambos os extremos na fronteira de D.

Definição 6 Um *multi-disco* é um espaço topológico D, homeomorfo a $\mathbb{S}^2$ menos um número finito k de discos fechados $B_1, B_2, \cdots, B_k$, disjuntos dois a dois. O número k é dito o *genus* de D. Sejam $U_1, U_2, \cdots, U_k$ discos abertos de $\mathbb{S}^2$, disjuntos dois a dois, tais que U_i contém B_i, para todo $i = 1, \cdots, k$. A imagem homeomórfica inversa de cada conjunto $U_i \setminus B_i$ é denominado uma *margem* do multi-disco D.

Para ilustrar o conceito de multi-disco, veja a figura 2.1.

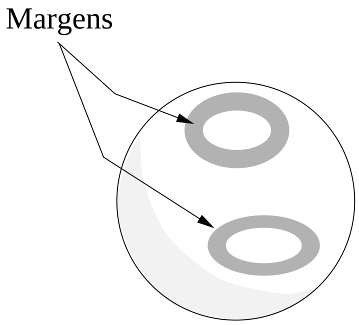


Figura 2.1: Exemplo de multi-disco e suas margens.

Definição 7 Um *mapa bidimensional* é um par $\mathcal{M} = (T_\mathcal{M}, \mathcal{L}_\mathcal{M})$, onde $T_\mathcal{M}$ é uma variedade bidimensional e $\mathcal{L}_\mathcal{M}$ é uma partição de $T_\mathcal{M}$ em três coleções finitas e disjuntas de *elementos*: os *vértices* $V_\mathcal{M}$, as *arestas* $E_\mathcal{M}$ e as *faces* $F_\mathcal{M}$, sendo que:

. um *vértice* é um subconjunto de $T_\mathcal{M}$ consistindo de um único ponto;

. uma *aresta* é uma curva de $T_\mathcal{M}$ cuja fronteira externa relativa a $T_\mathcal{M}$ é uma união de vértices;

. uma *face* é um multi-disco de $T_\mathcal{M}$ cuja fronteira externa relativa a $T_\mathcal{M}$ é uma união de vértices e arestas.

A união de todos os vértices e arestas de um mapa é denominada a *rede* do mapa.

A definição de arco é bastante liberal, e permite por exemplo arcos cuja fronteira externa é um conjunto de dimensão 1. No entanto, a definição de mapa restringe as arestas de tal forma que a fronteira externa de uma aresta pode ser composta por 0, 1 ou 2 vértices. Caso esta fronteira seja vazia (isto é, possua 0 vértices), dizemos que a aresta é uma *aresta oval*; caso contrário, isto é, se a fronteira possui 1 ou 2 vértices, dizemos que a aresta é uma *aresta-arco*; além disso, se a fronteira contém apenas um vértice, dizemos que a aresta-arco é uma *aresta-laço*.

É importante ressaltar que a definição 7 generaliza o conceito de mapa normalmente utilizado na literatura. Em particular, ela permite mapas cuja rede é vazia; neste caso, o mapa é denominado *mapa trivial*, sendo composto por uma única face correspondente a toda a superfície de $T_{\mathcal{M}}$. Note que, pela definição de face, esta superfície $T_{\mathcal{M}}$ deve ser homeomorfa a $\mathbb{S}^2$. Dizemos que um mapa trivial é composto por uma única *face sem fronteira*.

Além disso, a definição também permite redes com mais de uma componente conexa; ou mapas com *vértices isolados* (vértices não incidentes a nenhuma aresta), com *arestas-laço* (arestas cujas extremidades coincidem num mesmo vértice), com arestas ovais (arestas que não possuem extremidades), etc. Veja figura 2.2.

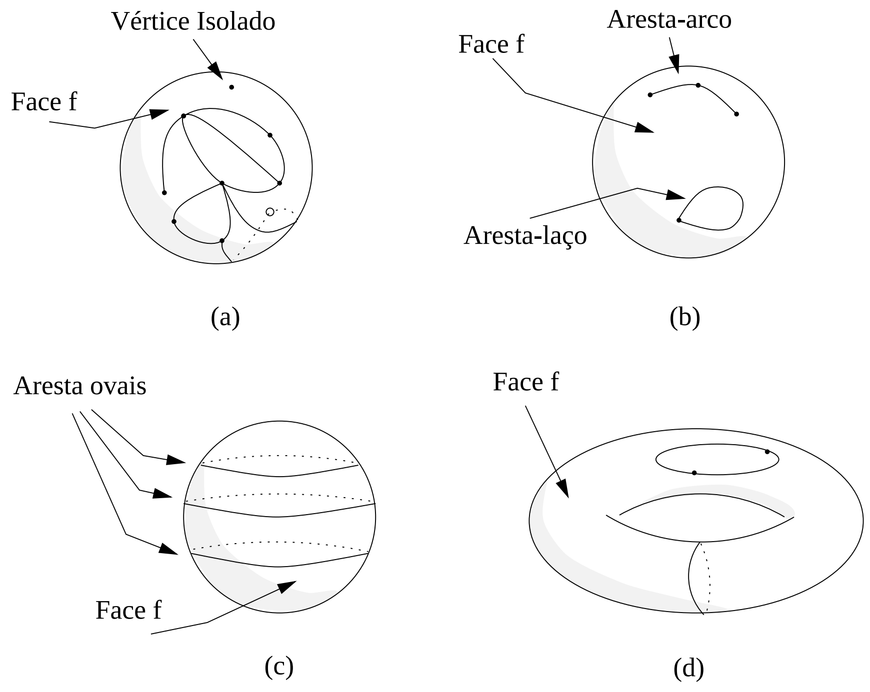


Figura 2.2: Exemplos de mapas bidimensionais.

Por outro lado, na figura 2.3, mostramos algumas subdivisões de variedades bidimensionais que não satisfazem as condições da definição 7. No caso (a) a segunda condição daquela definição é violada, pois a fronteira de e inclui pontos que não são vértices; em (b) a terceira condição é violada, pois f não é homeomorfa a um multi-disco.

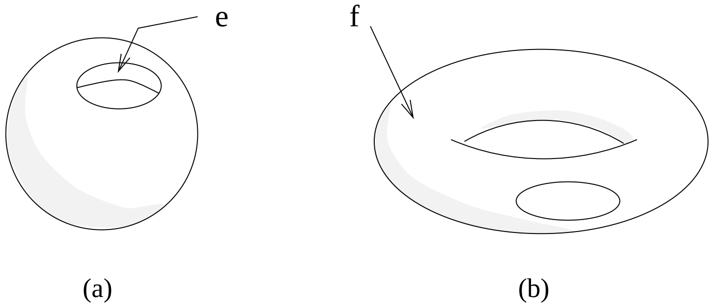


Figura 2.3: Exemplos de subdivisões que não são mapas bidimensionais.

2.2 Vizinhanças canônicas

Lema 1 *Todo vértice v de um mapa bidimensional $\mathcal{M} = (T_{\mathcal{M}}, \mathcal{L}_{\mathcal{M}})$ está contido num disco aberto D_v de $T_{\mathcal{M}}$ tal que:*

(i) D_v não contém nenhum outro vértice do mapa;

(ii) a intersecção de D_v com cada aresta do mapa consiste de $0, 1$, ou 2 arcos que são raios de D_v e pontas da aresta.

Lema 2 *Toda aresta-arco s de um mapa bidimensional $\mathcal{M} = (T_{\mathcal{M}}, \mathcal{L}_{\mathcal{M}})$ está contida num disco aberto D_s de $T_{\mathcal{M}}$ tal que:*

(i) s é um diâmetro de D_s;

(ii) D_s não intercepta nenhum vértice ou aresta do mapa exceto s.

Definição 8 Uma *faixa* de um espaço topológico T é um subespaço de T que é um cilindro ou uma fita de Möbius.

Lema 3 *Toda aresta oval c de um mapa bidimensional $\mathcal{M} = (T_{\mathcal{M}}, \mathcal{L}_{\mathcal{M}})$ está contida numa faixa H_c de $T_{\mathcal{M}}$ tal que:*

(i) c dá exatamente uma volta em torno de H_c;

(ii) H_c não intercepta nenhum vértice ou aresta do mapa exceto c.

Definição 9 Os discos abertos D_v e D_s e a faixa H_c definidos acima são denominados *vizinhanças canônicas* dos respectivos elementos: vértice v, aresta-arco s e aresta oval c.

2.3 Incidência entre os elementos

De acordo com as definições acima, a fronteira externa de uma aresta-arco de um mapa consiste de um par de pontos (não necessariamente distintos), que são denominados os *extremos* da aresta-arco.

Analogamente, a fronteira externa de uma face consiste de um número finito de componentes, cada uma das quais é uma união de vértices e arestas. Vale notar que cada uma destas componentes pode ser incidente a duas margens de duas faces distintas – figura 2.4(a) – ou a duas margens de uma mesma face – figura 2.4(b) – ou a uma margem de uma única face – veja a figura 2.4(c).

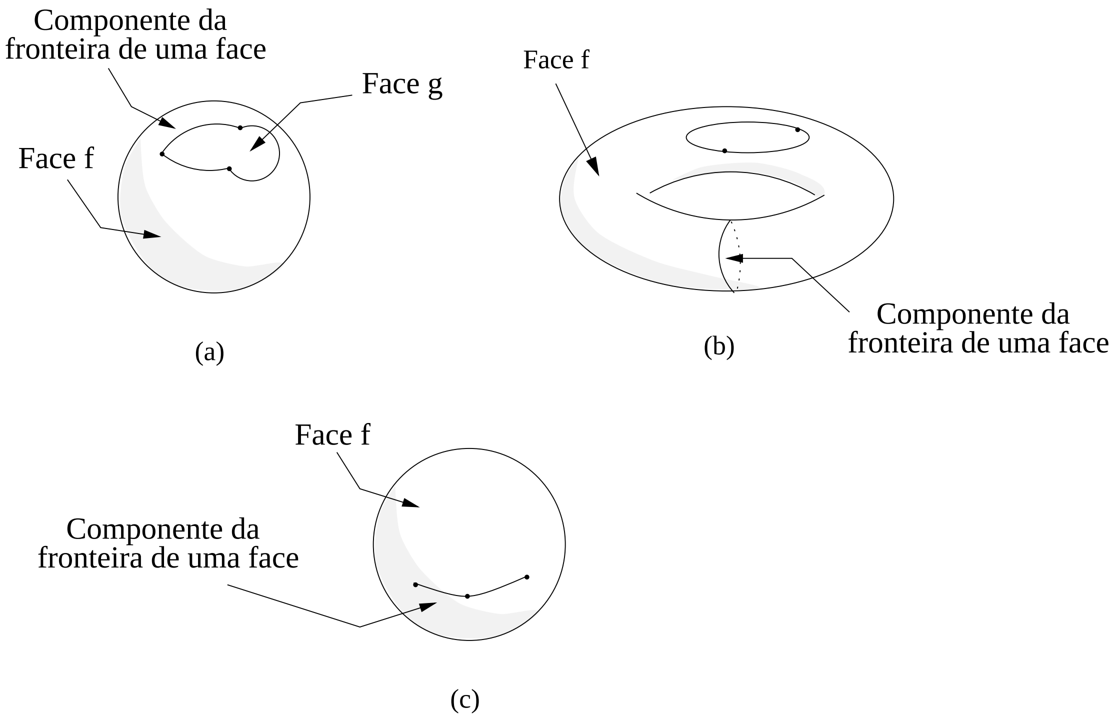


Figura 2.4: Incidência entre margens e componentes da fronteira de uma face.

2.4 Orientação

Dizemos que um mapa $\mathcal{M} = (T_{\mathcal{M}}, \mathcal{L})$ é *orientável* quando a superfície $T_{\mathcal{M}}$ é orientável. Além disso, se já temos definida alguma orientação sobre tal superfície então o mapa é dito *orientado*.

2.4.1 Orientação dos elementos

Para cada aresta de um mapa podemos definir duas *orientações internas* (ou longitudinais), que são os dois sentidos de percurso ao longo da aresta; ou as duas maneiras de distinguir a *ponta inicial* e a *ponta final* da aresta. Podemos definir também duas *orientações externas* (ou transversais), que são as duas maneiras possíveis de definir o *lado esquerdo* e o *lado direito* da aresta, numa vizinhança canônica da mesma. Estas duas orientações juntas constituem a *orientação total* da aresta.

Para indicar estas orientações, vamos utilizar um par de pequenas setas colocadas sobre um ponto qualquer da aresta: uma seta tangente à aresta, indicando a ordem de percurso da mesma, e a outra perpendicular à primeira, cruzando do lado direito para o lado esquerdo da aresta.

Uma maneira de visualizar estas orientações é imaginar um observador minúsculo andando sobre a superfície do mapa, ao longo da aresta: a orientação interna diz em que sentido ele está caminhando, e a externa diz em que lado da aresta está o seu pé esquerdo (ou seja, sobre que lado da superfície ele está andando). Veja a figura 2.5.

Figura 2.5: Orientações internas (ou longitudinais) e externas (ou transversais) de uma aresta.

Cada aresta pode ter portanto 4 orientações totais distintas. Veja figura 2.6. A orientação da superfície nos permite distinguir duas dessas orientações totais como *positivas* (aquelas nas quais o sentido de rotação da orientação interna para a externa pelo menor ângulo concorda com a orientação da superfície). As outras duas orientações são ditas *negativas*.

Note que a orientação externa de uma aresta nos permite distinguir a *face à esquerda* e a *face à direita* da aresta (que podem ser a mesma face). Adicionalmente, no caso de uma aresta-arco, a orientação interna desta aresta nos permite distinguir de maneira única o *vértice de origem* e o *vértice de destino* desta aresta (que também podem ser o mesmo vértice).

No caso de um vértice, podemos ter duas *orientações externas* que correspondem aos dois sentidos de rotação em torno do mesmo.

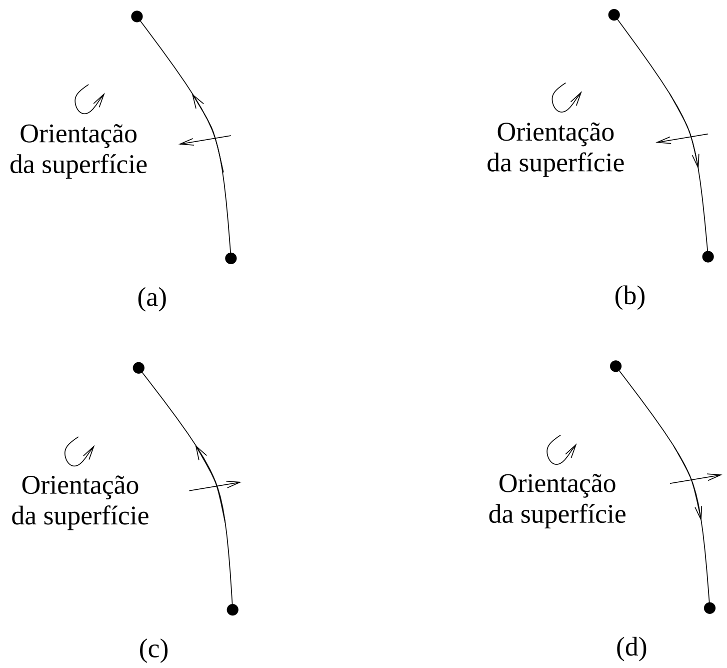


Figura 2.6: As quatro orientações de uma aresta: (a) e (d) orientações totais positivas; (b) e (c) orientações totais negativas.

No caso de uma face, podemos ter duas *orientações internas* que correspondem aos sentidos de rotação dentro da mesma.

Tanto no caso do vértice como da face, a orientação da superfície permite distinguir as orientações *positiva* e *negativa* do elemento.

De agora em diante, a menos quando dito o contrário, vamos supor que vértice, aresta e face se referem a elementos orientados, isto é, a palavra "aresta" será utilizada para indicar uma "aresta orientada"; o mesmo vale para vértice e face.

2.5 Característica de Euler

Como sabemos, os elementos de um mapa tradicional, onde não existem vértices isolados nem arestas ovais e onde as faces possuem genus 0, satisfazem a equação de Euler-Poincaré [18]:

$$n_v - n_e + n_f = \chi(T)$$

onde n_v, n_e e n_f são respectivamente os números de vértices, arestas e faces do mapa e $\chi(T)$, um número inteiro que depende apenas da topologia de T, é a *característica de Euler* da superfície T.

Para estender esta equação aos nossos mapas bidimensionais vamos utilizar o seguinte lema:

Lema 4 *Um multi-disco D de genus $k > 1$ pode ser particionado num único disco e $k-1$ arestas-arco, disjuntas duas a duas, com extremos na fronteira de D.*

Com isto podemos provar que

Teorema 5 *Se $\mathcal{M} = (T, \mathcal{L})$ é mapa bidimensional conexo e orientável então a caracterítica de Euler da superfície T é dada por*

$$\chi(T) = n_v - n_a + n_f + (n_f - n_m) \tag{2.1}$$

onde n_v, n_a, n_f e n_m são respectivamente o número de vértices, arestas-arco (excluindo arestas ovais), faces e margens no mapa.

Demonstração: Se o mapa é trivial (isto é, possui apenas uma face sem fronteira), então é fácil ver que a equação (2.1) é satisfeita, pois, por definição, a superfície T é homeomorfa a $\mathbb{S}^2$, e $n_v - n_a + n_f + (n_f - n_m) = 0 - 0 + 1 + (1 - 0) = 2$, que é a característica de Euler da esfera $\mathbb{S}^2$. Analogamente, se o mapa possui apenas um vértice isolado e zero arestas, então $n_v - n_a + n_f + (n_f - n_m) = 1 - 0 + 1 + (1 - 1) = 2$, e por outro lado, a única face do mapa é um disco; daí segue-se que a superfície T é homeomorfa a $\mathbb{S}^2$ cuja característica de Euler é 2.

Agora, suponha que o mapa possua n_o arestas ovais. Então, o número total de arestas é $n_e = n_a + n_o$. Note que se inserirmos n_o vértices no mapa, um sobre cada aresta oval, transformando-as em arestas-laço, passamos a ter um mapa com $n_v + n_o$ vértices, zero arestas ovais e $n_a + n_o$ arestas-arco. Por outro lado, o número de margens e faces permanece inalterado. Deste modo, após essa transformação, o valor do lado direito da equação (2.1) mantém-se inalterado. Logo, podemos supor que o mapa não tem arestas ovais.

Pelo lema 4, sabemos que uma face f com $k > 1$ margens pode ser decomposta em uma face com uma única margem e mais $k - 1$ arestas-arco. Neste processo de decomposição, pode ser necessária a inclusão de novos vértices nas fronteiras das margens envolvidas; porém, se inserirmos um novo vértice sobre uma aresta quebrando-a em duas novas arestas, o lado direito da equação (2.1) é preservado, pois tanto o número de vértices n_v como o número de arestas-arco n_a são acrescidos de 1. Portanto, aplicando-se este processo a todas as faces do mapa com mais de uma margem, obtemos ao final um mapa $\mathcal{M}' = (T, \mathcal{L}')$ com n_f faces que são discos, n'_e arestas que são arcos (e não são ovais) e n'_v vértices que não são isolados. Logo, neste mapa, vale a equação Euler-Poincaré [18]; isto é,

$$\chi(T) = n'_v - n'_e + n'_f$$

Visto que, nesse mapa $n'_e = n'_a$ (pois, $n'_o = 0$) e $n'_m = n'_f$ (cada face possui apenas uma margem) então

$$\chi(T) = n'_v - n'_a + n'_f + (n'_f - n'_m)$$

Isto implica que a equação (2.1) é válida no mapa $\mathcal{M}'$. Uma vez que a obtenção do mapa $\mathcal{M}'$ a partir do mapa $\mathcal{M}$ foi efetuada de modo a sempre preservar a equação (2.1) então, aplicando um processo inverso, podemos concluir que esta equação também é válida no mapa original $\mathcal{M}$. $\square$

2.6 Mapas esféricos

Definição 10 Um mapa sobre a superfície $\mathbb{S}^2$, isto é, o mapa $\mathcal{M} = (\mathbb{S}^2, \mathcal{L}_{\mathcal{M}})$, é denominado um *mapa esférico.*

Corolário 6 *Um mapa bidimensional conexo e orientável é homeomorfo a um mapa esférico se e somente se*

$$n_v - n_a + n_f + (n_f - n_m) = 2$$

onde n_v, n_a, n_f e n_m são respectivamente o número de vértices, arestas-arco (excluindo arestas ovais), faces e margens do mapa.

Capítulo 3

As esquinas de um mapa esférico

De agora em diante, vamos nos restringir ao estudo dos mapas esféricos, sendo que o nosso objetivo neste capítulo é definir um método que nos permita a representação da topologia desses mapas.

Para que um mapa possa ser manipulado no computador, é importante definirmos uma codificação puramente combinatória — isto é, uma estrutura de dados — para representar a sua topologia. Na literatura há um número considerável de estruturas para esse fim. Dentre elas podemos destacar: *half-edge* [26], *quad-edge* [16], *winged-edge* [2], *vertex-edge* [36], *radial edge* [4], *grafos de incidência* [11], *3-gemas* [24], *elementos de incidência* [31], *cell-tuple structure* [3] e *n-G-maps* [22]. No entanto, devido a algumas particularidades dos mapas esféricos que nos interessam, por exemplo, a presença de vértices isolados e principalmente de ovais, não podemos utilizar diretamente nenhuma dessas estruturas. Por isso, neste capítulo vamos desenvolver uma adaptação da estrutura *half-edge* de modo a permitir a representação de tais elementos.

É fácil ver que a topologia de um mapa (em particular, de um mapa esférico) não pode ser completamente descrita considerando-se apenas as relações de incidência entre seus elementos. Por exemplo, as figuras 3.1(a) e (b) mostram dois mapas topologicamente distintos com conjuntos de elementos isomorfos e com as mesmas relações de incidência.

Por este motivo, todas as representações combinatórias de mapas devem incluir, além das relações de incidência, algumas informações adicionais. Conforme demonstrado por Edmonds [12], é suficiente incluir a descrição da ordem das arestas em torno de cada vértice e em torno de cada face.

3.1 Definição de esquinas

Visto que um mapa esférico é um mapa orientável, vamos então considerar apenas elementos com orientação (total) positiva. Portanto, arestas podem ter apenas duas orientações

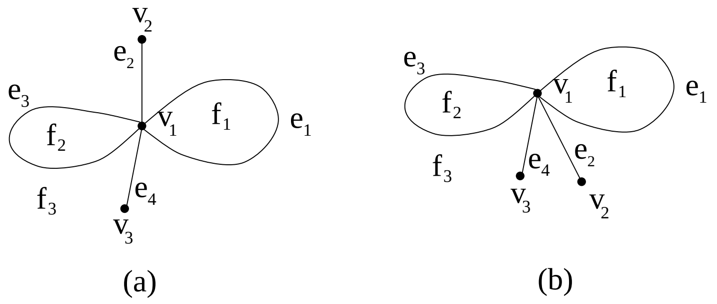


Figura 3.1: Apenas as relações de incidência não são suficientes para descrever a topologia de um mapa.

distintas, enquanto que vértices e faces podem ter apenas uma. Para indicar a aresta que consiste da mesma curva que a aresta e mas com orientação (total) invertida, vamos utilizar a notação $\neg e$.

O objetivo da estrutura *half-edge* é representar as relações de incidência e ordem entre os elementos (vértices, arestas e faces) de um mapa. Para isto, cada aresta é conceitualmente dividida em duas pontas (correspondentes às duas orientações), e para cada uma delas indicam-se o vértice de origem e a face esquerda. Além disso, para completar a representação, indica-se também a ordem das arestas em torno de cada vértice, e a ordem das arestas em torno de cada face. Para mais detalhes, o leitor pode consultar o livro de Mäntylä [26] ou a tese de doutorado de Weiler [36].

A definição abaixo é uma formalização da estrutura *half-edge* que inclui as extensões necessárias para representar vértices isolados, ovais e faces com múltiplas bordas.

Definição 11 Dado um mapa $\mathcal{M}$, seja $\varnothing$ um símbolo distinto de todos os elementos deste mapa. A tripla $c = \lfloor v, e, f \rfloor$ é denominada uma *esquina do mapa* se uma das seguintes condições é verificada:

(i) e é uma aresta-arco positivamente orientada de $\mathcal{M}$, v é a origem de e, e f é a face à esquerda de e;

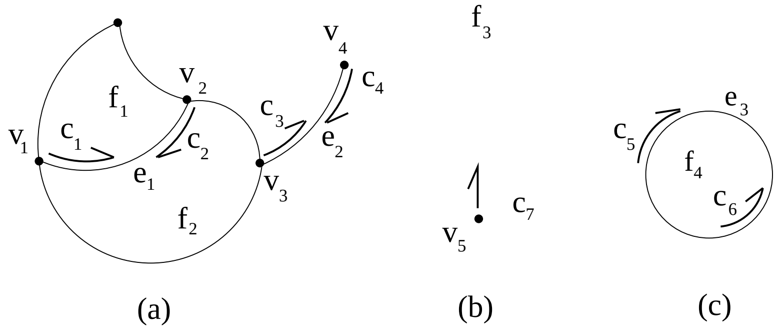
(ii) e é uma aresta oval positivamente orientada de $\mathcal{M}$, f é a face à esquerda de e e $v = \varnothing$, indicando o "vértice indefinido";

(iii) v é um vértice isolado positivamente orientado de $\mathcal{M}$, incidente na face f, e $e = \varnothing$, indicando a "aresta indefinida".

Denotaremos por $Q_{\mathcal{M}}$ o conjunto de esquinas do mapa $\mathcal{M}$. Dada uma esquina $c = \lfloor v, e, f \rfloor$ em $Q_{\mathcal{M}}$, escreveremos $Org(c) = v$, $Edge(c) = e$ e $Left(c) = f$. Note que Org é uma função de $Q_{\mathcal{M}}$ para $V_{\mathcal{M}} \cup \{\varnothing\}$; $Edge$ é uma função de $Q_{\mathcal{M}}$ para $E_{\mathcal{M}} \cup \{\varnothing\}$ e $Left$ é uma função total de $Q_{\mathcal{M}}$ para $F_{\mathcal{M}}$.

Observe que se $\mathcal{M}$ é o mapa esférico trivial (isto é, o mapa esférico com uma única face $f = \mathbb{S}^2$, zero vértices e zero arestas), o conjunto $Q_{\mathcal{M}}$ é vazio.

Nas ilustrações, indicaremos uma esquina $\lfloor v, e, f \rfloor$ pelo símbolo $\rightharpoonup$ colocado do lado esquerdo da aresta e, saindo do vértice de origem v (se houver). Veja as figuras 3.2(a) e (c). Ou seja, a seta indica a orientação interna da aresta e a meia-aspa indica a orientação externa. No caso particular de um vértice isolado a direção da haste é irrelevante e a meia-aspa indica a orientação do vértice. Por exemplo, veja a figura 3.2(b).



$$c_1 = \lfloor v_1, e_1, f_1 \rfloor \quad c_2 = \lfloor v_2, \neg e_1, f_2 \rfloor \quad c_3 = \lfloor v_3, e_2, f_3 \rfloor \quad c_4 = \lfloor v_4, \neg e_2, f_3 \rfloor$$
$$c_5 = \lfloor \varnothing, e_3, f_3 \rfloor \quad c_6 = \lfloor \varnothing, \neg e_3, f_4 \rfloor \quad c_7 = \lfloor v_5, \varnothing, f_3 \rfloor$$

Figura 3.2: Esquinas de um mapa.

3.2 Função *Sym*

Observe que sobre uma aresta (arco ou oval) sempre existem duas esquinas distintas, correspondentes às duas orientações da aresta.

Definição 12 Para toda esquina $c = \lfloor v, e, f \rfloor$ tal que e é uma aresta-arco, $Sym(c)$ é a esquina *simétrica* a c, definida sobre a aresta e tomada com orientação oposta; isto é, $Sym(c) = \lfloor u, \neg e, g \rfloor$, onde u é o vértice de destino de e e g é a face à direita de e. Além disso, para toda esquina $c = \lfloor \varnothing, e, f \rfloor$ sobre uma aresta oval, $Sym(c) = \lfloor \varnothing, \neg e, g \rfloor$, onde g é a face à direita de e. Finalmente, para toda esquina $c = \lfloor v, \varnothing, f \rfloor$ sobre um vértice isolado v, $Sym(c) = c$.

Por exemplo, na figura 3.2, $Sym(c_1) = c_2$, $Sym(c_5) = c_6$ e $Sym(c_7) = c_7$.

3.3 Propriedades das esquinas

A partir das definições 11 e 12 podemos verificar facilmente que, para toda esquina c:

P1. $Org(c)$ é um vértice isolado se e somente se $Edge(c) = \varnothing$;

P2. $Edge(c)$ é uma aresta oval se e somente se $Org(c) = \varnothing$;

P3. $Edge(Sym(c)) = \neg\, Edge(c)$, (convencionando-se que $\neg\, \varnothing = \varnothing$);

P4. $Sym(Sym(c)) = c$;

P5. $Sym(c) \neq c$ se e somente se $Edge(c) \neq \varnothing$

Observe que o conjunto de esquinas e as funções Org, $Edge$ e $Left$ descrevem completamente as relações de incidência entre os elementos que compõem um mapa.

3.4 Funções de percurso

Como vimos anteriormente, a descrição completa da topologia de um mapa exige, além das relações de incidência entre os elementos, também as relações de ordem entre os mesmos. Para estabelecer estas relações, vamos definir duas funções adicionais, denominadas *funções de percurso.*

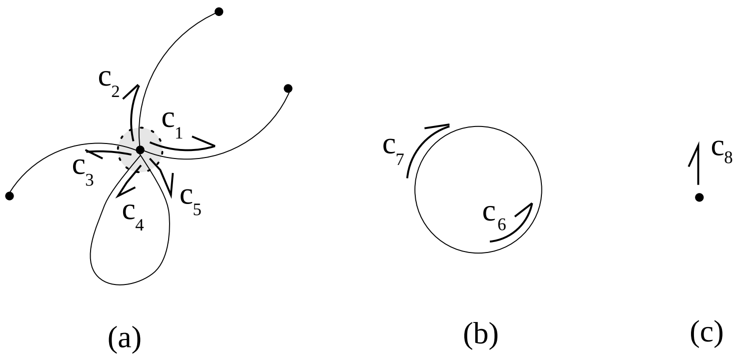
3.4.1 A função $Onext$

Pelo lema 1, as arestas-arco orientadas com origem num vértice v podem ser ordenadas ciclicamente em torno de v, com base na orientação da superfície. Esta relação de ordem será representada através da função $Onext(c)$. Ou seja, dada uma esquina $c = \lfloor v, e, f \rfloor$ definida sobre uma aresta-arco (isto é, com $v \neq \varnothing$ e $e \neq \varnothing$), então $Onext(c)$ é a próxima esquina com origem em v, no sentido positivo de rotação em torno de v. Veja a figura 3.3(a).

No caso especial da aresta $Edge(c)$ ser uma aresta oval, isto é, se $c = \lfloor \varnothing, e, f \rfloor$, definimos $Onext(c)$ como sendo a esquina $\lfloor \varnothing, \neg e, g \rfloor$, onde g é a face à direita de e; ou seja, $Onext(c) = Sym(c)$. Por exemplo, na figura 3.3(b), $Onext(c_6) = c_7$ e $Onext(c_7) = c_6$.

Finalmente, se $Org(c)$ é um vértice isolado, isto é, se $Edge(c) = \varnothing$, então $Onext(c) = c$, por definição. Por exemplo, na figura 3.3(c), $Onext(c_8) = c_8$.

Pode-se verificar que $Onext$ é uma função total e bijetora de $Q_{\mathcal{M}}$ em $Q_{\mathcal{M}}$. Denotaremos a sua inversa por $Oprev(c)$. Ou seja, se $Edge(c)$ é uma aresta-arco, então $Oprev(c)$ retorna a esquina com origem em $v = Org(c)$ que é anterior a c no sentido positivo de rotação em torno de v. Se $Edge(c)$ é uma aresta oval, então $Oprev(c) = Onext(c) = Sym(c)$; e, se $Edge(c) = \varnothing$, então $Oprev(c) = c$.



Esquina	Onext
c_1	c_2
c_2	c_3
c_3	c_4
c_4	c_5
c_5	c_1
c_6	c_7
c_7	c_6
c_8	c_8

Figura 3.3: Exemplos da função $Onext$.

3.4.2 A função $Lnext$

Observe que a fronteira de uma face f consiste de uma ou mais componentes conexas, sendo que estas componentes conexas são compostas pelos vértices $Org(c)$ e pelas arestas $Edge(c)$ de todas as esquinas c tais que $Left(c) = f$. Em particular, a fronteira de uma face pode ser vazia.

Como se pode verificar, a ordem em que as arestas ocorrem em cada componente conexa na fronteira de uma face é dada pela função $Lnext$ definida, para toda esquina c, por

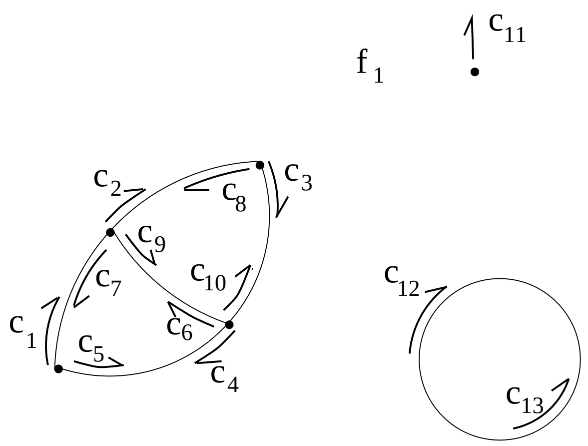
$$Lnext(c) = Oprev(Sym(c)) \tag{3.1}$$

Em particular, se $Org(c) = \varnothing$ ou $Edge(c) = \varnothing$ (isto é, se $Edge(c)$ é uma aresta oval ou se $Org(c)$ é um vértice isolado) então, pelas definições de Sym e de $Oprev$, temos que $Lnext(c) = c$. Veja a figura 3.4.

É fácil ver que $Lnext$, assim como $Onext$, é uma função total e bijetora de $Q_{\mathcal{M}}$ em $Q_{\mathcal{M}}$. Denotaremos a sua inversa por $Lprev$.

Intuitivamente, $Lnext(c)$ é a esquina seguinte a c na mesma componente conexa da face $Left(c)$, quando esta componente é percorrida no sentido positivo (visto de um ponto no interior da face $Left(c)$). Portanto, partindo-se de uma esquina c, a função $Lnext$ determina uma ordenação circular das esquinas definidas sobre os elementos de uma componente conexa da face $Left(c)$. Por exemplo, na figura 3.4, partindo-se da esquina c_1 obtemos as esquinas $\langle c_1, c_2, c_3, c_4 \rangle$, onde $\langle \cdots \rangle$ denota uma ordenação circular.

Mais especificamente, suponha que a sequência circular de esquinas alcançadas pela função $Lnext$ a partir da esquina c_1 é $\langle c_1, c_2, \cdots, c_k \rangle$ e que $Org(c_1) \neq \varnothing$ e $Edge(c_1) \neq \varnothing$; então, a sequência circular de arestas alcançadas neste percurso é $\langle Edge(c_1), Edge(c_2), \cdots, Edge(c_k) \rangle$, sendo que o vértice de destino da aresta $Edge(c_i)$ coincide com o vértice de origem da aresta $Edge(c_{i+1})$; isto é, $Org(Sym(c_i)) = Org(c_{i+1})$.



Esquina c	$Lnext(c)$
c_1	c_2
c_2	c_3
c_3	c_4
c_4	c_1
c_5	c_6
c_6	c_7
c_7	c_5
c_8	c_9
c_9	c_{10}
c_{10}	c_8
c_{11}	c_{11}
c_{12}	c_{12}
c_{13}	c_{13}

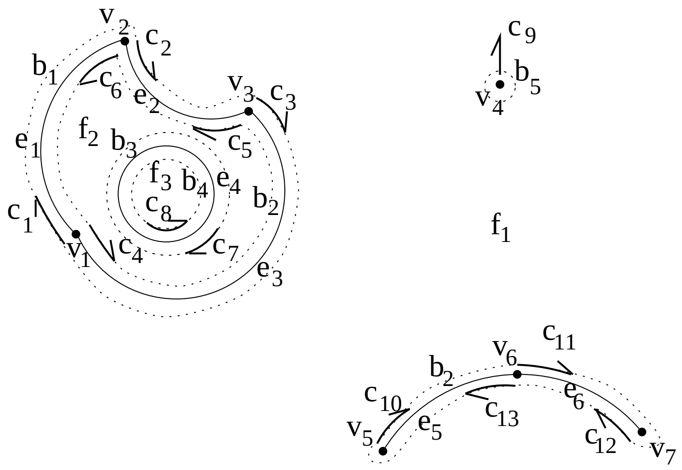
Figura 3.4: Exemplo da função $Lnext$.

Veja a figura 3.4. Note que esta observação também vale trivialmente se $Org(c) = \varnothing$ ou $Edge(c) = \varnothing$.

Assim sendo, podemos concluir que cada componente conexa da fronteira de uma face corresponde a uma órbita da função $Lnext$. Vamos denominar cada uma dessas órbitas de uma *borda* da face, e vamos denotar por $Bord(c)$ a órbita que contém a esquina c. Por exemplo, na figura 3.4, as bordas da face f_1 são $Bord(c_1) = \langle c_1, c_2, c_3, c_4 \rangle$, $Bord(c_{11}) = \langle c_{11} \rangle$ e $Bord(c_{12}) = \langle c_{12} \rangle$.

Observe que a toda borda fica associada uma orientação (um sentido de percurso) determinada pelas esquinas que compõem aquela borda.

Para melhor ilustrar a relação entre as funções de percurso $Onext$, $Lnext$ e $Bord$, veja a figura 3.5.



(a)

Esquina	$Onext(c)$	$Lnext(c)$	$Bord(c)$
$c_1 = \lfloor v_1, e_1, f_1 \rfloor$	c_4	c_2	
$c_2 = \lfloor v_2, e_2, f_1 \rfloor$	c_6	c_3	$\langle c_1, c_2, c_3 \rangle$
$c_3 = \lfloor v_3, e_3, f_1 \rfloor$	c_5	c_1	
$c_4 = \lfloor v_1, \neg e_3, f_2 \rfloor$	c_1	c_5	
$c_5 = \lfloor v_3, \neg e_2, f_2 \rfloor$	c_3	c_6	$\langle c_4, c_5, c_6 \rangle$
$c_6 = \lfloor v_2, \neg e_1, f_2 \rfloor$	c_2	c_4	
$c_7 = \lfloor \varnothing, e_4, f_2 \rfloor$	c_8	c_7	$\langle c_7 \rangle$
$c_8 = \lfloor \varnothing, \neg e_4, f_3 \rfloor$	c_7	c_8	$\langle c_8 \rangle$
$c_9 = \lfloor v_4, \varnothing, f_1 \rfloor$	c_9	c_9	$\langle c_9 \rangle$
$c_{10} = \lfloor v_5, e_5, f_1 \rfloor$	c_{10}	c_{11}	
$c_{11} = \lfloor v_6, e_6, f_1 \rfloor$	c_{13}	c_{12}	$\langle c_{10}, c_{11}, c_{12}, c_{13} \rangle$
$c_{12} = \lfloor v_7, \neg e_6, f_1 \rfloor$	c_{12}	c_{13}	
$c_{13} = \lfloor v_6, \neg e_5, f_1 \rfloor$	c_{11}	c_{10}	

(b)

Figura 3.5: Exemplo das funções *Onext*, *Lnext* e *Bord*.

Capítulo 4

Representação da topologia de mapas esféricos

Baseado na descrição apresentada no capítulo anterior, vamos agora definir uma estrutura de dados denominada SMC (*Spherical Maps by Corners*) que nos permite representar a topologia dos mapas esféricos. Esta estrutura consiste basicamente da estrutura *half-edge* [26] com extensões motivadas pela definição 11.

Além disso, vamos também definir um conjunto de *operadores topológicos* que nos permitem manipular esta estrutura, sendo que vamos considerar três categorias de operadores: de criação de mapas e elementos (seção 4.3), de transferência de elementos entre mapas (seção 4.4), e de conexão e desconexão de elementos num mapa (seção 4.5).

4.1 A estrutura de dados SMC

Conforme vimos anteriormente, a topologia de um mapa esférico pode ser completamente descrita utilizando-se as funções Org, $Edge$, $Left$, Sym, $Onext$ e $Lnext$. Na verdade, basta especificar quaisquer duas dentre as três funções $Onext$, Sym e $Lnext$, pois o valor da terceira função pode ser obtido utilizando-se uma das seguintes relações:

$$\begin{aligned} Lnext(c) &= Onext^{-1}(Sym(c)) \\ Sym(c) &= Onext(Lnext(c)) \\ Onext(c) &= Sym(Lnext^{-1}(c)) \end{aligned}$$

Note que se escolhermos representar as funções $Onext$ e Sym, então para determinarmos o valor de $Lnext(c)$ precisamos computar o valor de $Onext^{-1}(c')$, onde $c' = Sym(c)$, e para isto é necessário percorrer todo o ciclo de esquinas em torno do vértice $Org(c')$, o que não pode ser realizado a um custo constante. Uma situação análoga ocorre se escolhermos representar as funções Sym e $Lnext$. Por outro lado, se representarmos as funções $Onext$ e $Lnext$, então o valor de Sym pode ser determinado diretamente a partir delas a um custo constante.

Por este motivo, na estrutura SMC, cada esquina c será representada por um objeto, de tipo Corner, contendo apontadores para os objetos que representam as esquinas $Onext(c)$ e $Lnext(c)$.

Além desses apontadores — que ligam os nós do tipo Corner entre si — cada Corner c contém três outros apontadores, denominados *c.org*, *c.edge*, *c.bord*, que apontam para objetos que representam o vértice $Org(c)$, a aresta $Edge(c)$ e a borda $Bord(c)$, de tipos Vertex, Edge e Border, respectivamente. Os casos especiais $Org(c) = \varnothing$ e $Edge(c) = \varnothing$ são representados por $c.org =$ Nil e $c.edge =$ Nil, respectivamente. Vale notar que para cada aresta não orientada do mapa existem 2 registros do tipo Edge, um para cada orientação da aresta, com S-círculos opostos.

A razão para armazenarmos um apontador para a borda $Bord(c)$ que contém a esquina c, e não para a face $Left(c)$, é que a fronteira de uma face pode ser composta por um conjunto com várias bordas que, em geral, precisam ser diferenciadas nos algoritmos de manipulação de mapas.

Num objeto b do tipo Border, armazenamos um apontador *b.face* para a face cuja fronteira contém aquela borda; e, além disso, em $b.desc$ armazenamos uma esquina qualquer da borda, a qual denominamos *a descritora* da borda. Note que as outras esquinas que compõem a borda podem ser obtidas a partir de $b.desc$ utilizando-se a função $Lnext$.

Para representar uma face f, utilizamos um objeto do tipo Face com um campo *f.frontier*, onde armazenamos o conjunto de bordas que constituem a fronteira da face.

Desta forma, para nos referirmos a um mapa, basta especificarmos uma esquina ou uma face deste mapa. Lembramos que o mapa trivial não tem esquinas.

A figura 4.1 mostra a definição em Modula-3 [28] da estrutura SMC, e a figura 4.2, ilustra o encadeamento entre os elementos desta estrutura. É importante notar que, no caso dos objetos Vertex e Edge não há apontadores de retorno para as esquinas definidas sobre estes elementos.

O desenvolvimento de um algoritmo para verificar a consistência/validade da estrutura SMC está fora do escopo deste trabalho. No entanto, uma maneira simples de se efetuar esta validação é converter a estrutura SMC para uma *quad-edge* [16] (para superfícies orientadas) e validar a *quad-edge* obtida desta conversão.

4.2 Informações não topológicas

Os nós e apontadores descritos acima representam apenas as informações topológicas do mapa. No entanto, existem outras informações dependentes da aplicação, associadas aos

```
Corner = object
    org : Vertex;
    edge : Edge;
    bord : Border;
    onext : Corner;
    lnext : Corner;
end;

Vertex = object
    props : VertProp;           {geometria do ponto e outras propriedades}
end;

Edge = object
    props : EdgeProp;           {geometria da aresta e outras propriedades}
end;

Border = object
    face : Face;
    desc : Corner;
end

Face = object
    props : FaceProp;           {propriedades dependentes da aplicação}
    frontier : set of Border;   {conjunto (lista) das bordas na fronteira da face}
end;
```

Figura 4.1: Estrutura de dados SMC.

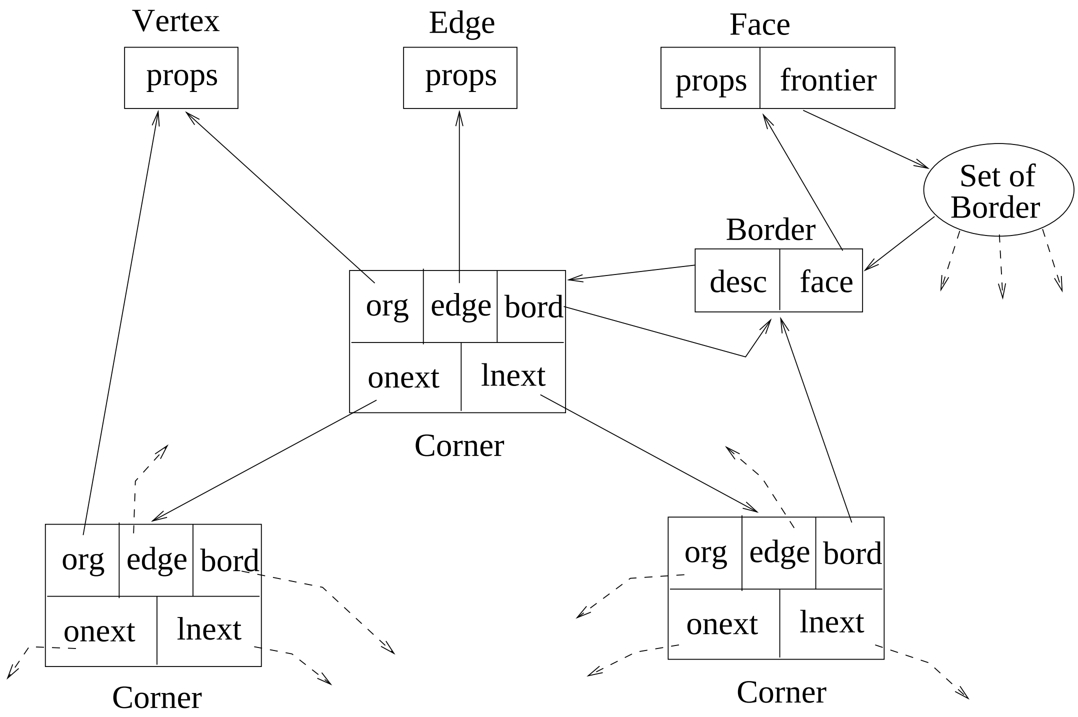


Figura 4.2: Ilustração da estrutura SMC.

elementos que compõem o mapa, como por exemplo: a geometria, a cor, a textura, etc, que também devem ser armazenadas na estrutura. Por isso, vamos supor a existência de objetos dos tipos VertProp, EdgeProp e FaceProp onde são armazenadas tais informações, sendo que estes objetos são apontados pelos campos *props* nos nós Vertex, Edge e Face, respectivamente.

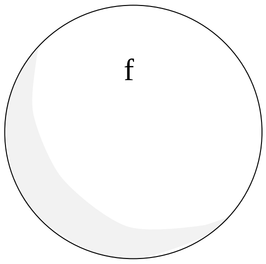
As aplicações que fazem uso da estrutura SMC devem definir estes objetos conforme necessário. Em particular, nos objetos VertProp e EdgeProp deve ser incluída a representação da geometria do vértice e da aresta.

É importante ressaltar que, nos operadores topológicos que descreveremos a seguir, quando são criados objetos do tipo Vertex, Edge e Face, os respectivos campos *props* são deixados indefinidos, isto é, com valores nulos. Fica a cargo do cliente da estrutura SMC a devida atualização destes valores.

4.3 Operadores de criação

Conforme veremos posteriormente, os operadores de conexão, desconexão e transferência nos permitem criar qualquer mapa esférico a partir dos seguintes *mapas elementares*: o mapa trivial (com uma face, sem arestas e sem vértices); o mapa com um único vértice isolado numa face; o mapa com uma aresta-arco com dois vértices distintos numa face; e o mapa com uma aresta oval delimitando duas faces. É fácil perceber que a criação de cada um destes mapas exige a criação de elementos diferentes, isto é, objetos de tipos diferentes na estrutura SMC. Por este motivo, é conveniente definir um operador topológico distinto para criar cada um destes mapas elementares: MakeFace, MakeVertex, MakeArcEdge e MakeOvalEdge.

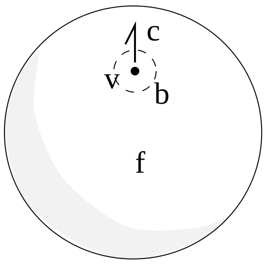
O operador MakeFace cria um mapa trivial, isto é, um mapa esférico com uma única face com zero bordas. Veja figura 4.3. Do ponto de vista da estrutura SMC, este operador consiste em criar um objeto f do tipo Face cujo campo $f.frontier$ é o conjunto vazio; este operador retorna o objeto f.



procedure MakeFace() : Face;
    $f \leftarrow \mathbf{new}$(Face);
    $f.frontier \leftarrow \{\}$;
    return f;

Figura 4.3: Operador MakeFace

O operador MakeVertex cria um novo mapa com um único vértice v, zero arestas, e uma única face f com uma única borda b consistindo do vértice v. Portanto, este operador cria um mapa com uma única esquina $c = \lfloor v, \varnothing, f \rfloor$, que é o valor retornado pelo operador. Veja figura 4.4.

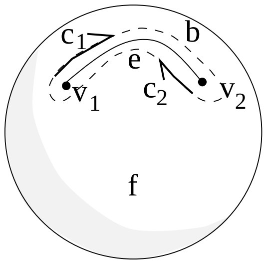


procedure MakeVertex() : Corner;
    $f \leftarrow \mathbf{new}$(Face);
    $b \leftarrow \mathbf{new}$(Border);
    $v \leftarrow \mathbf{new}$(Vertex);
    $c \leftarrow \mathbf{new}$(Corner);
    $f.frontier \leftarrow \{b\}$;
    $b.face \leftarrow f$;
    $b.desc \leftarrow c$;
    $c.org \leftarrow v$;
    $c.edge \leftarrow \varnothing$;
    $c.bord \leftarrow b$;
    $c.onext \leftarrow c$;
    $c.lnext \leftarrow c$;
    return c;

Figura 4.4: Operador MakeVertex

O operador MakeArcEdge cria um mapa com dois vértices v_1 e v_2, uma aresta-arco e, e uma face f. A fronteira de f é composta por uma única borda b que contém as duas esquinas $c_1 = \lfloor v_1, e, f \rfloor$ e $c_2 = \lfloor v_2, \neg e, f \rfloor$. Por definição, este operador retorna uma das esquinas. Veja figura 4.5.

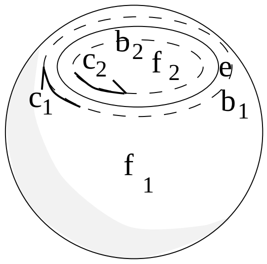
Para criar uma aresta-laço basta utilizar este operador seguido pelo operador JoinVerticesSplitBorder descrito na seção 4.5.4.



procedure MakeArcEdge() : Corner;	
$f \leftarrow$ **new**(Face);	
$b \leftarrow$ **new**(Border);	
$e \leftarrow$ **new**(Edge);	
$v_1 \leftarrow$ **new**(Vertex);	$v_2 \leftarrow$ **new**(Vertex);
$c_1 \leftarrow$ **new**(Corner);	$c_2 \leftarrow$ **new**(Corner);
$f.frontier \leftarrow \{b\}$;	
$b.face \leftarrow f$;	
$b.desc \leftarrow c_1$;	
$c_1.org \leftarrow v_1$;	$c_2.org \leftarrow v_2$;
$c_1.edge \leftarrow e$;	$c_2.edge \leftarrow \neg e$;
$c_1.bord \leftarrow b$;	$c_2.bord \leftarrow b$;
$c_1.onext \leftarrow c_1$;	$c_2.onext \leftarrow c_2$;
$c_1.lnext \leftarrow c_2$;	$c_2.lnext \leftarrow c_1$;
return c_1;	

Figura 4.5: Operador MakeArcEdge

O operador MakeOvalEdge cria um mapa com zero vértices, uma única aresta oval e, e com duas faces f_1 e f_2. A fronteira de cada uma dessas faces contém apenas uma borda, cada uma com uma única esquina. Por definição, o resultado retornado por este operador é uma das esquinas sobre a aresta oval. Veja figura 4.6.



procedure MakeOvalEdge() : Corner;

$f_1 \leftarrow$ **new**(Face);	$f_2 \leftarrow$ **new**(Face);
$b_1 \leftarrow$ **new**(Border);	$b_2 \leftarrow$ **new**(Border);
$e \leftarrow$ **new**(Edge);	
$c_1 \leftarrow$ **new**(Corner);	$c_2 \leftarrow$ **new**(Corner);
$f_1.frontier \leftarrow \{b_1\}$;	$f_2.frontier \leftarrow \{b_2\}$;
$b_1.face \leftarrow f_1$;	$b_2.face \leftarrow f_2$;
$b_1.desc \leftarrow c_1$;	$b_2.desc \leftarrow c_2$;
$c_1.org \leftarrow \varnothing$;	$c_2.org \leftarrow \varnothing$;
$c_1.edge \leftarrow e$;	$c_2.edge \leftarrow \neg e$;
$c_1.bord \leftarrow b_1$;	$c_2.bord \leftarrow b_2$;
$c_1.onext \leftarrow c_2$;	$c_2.onext \leftarrow c_1$;
$c_1.lnext \leftarrow c_1$;	$c_2.lnext \leftarrow c_2$;
return c_1;	

Figura 4.6: Operador MakeOvalEdge

Como é fácil perceber, todos esses operadores têm custo constante.

4.4 Operador de transferência

Visto que os operadores de criação apresentados na seção anterior sempre criam um novo mapa para conter o novo elemento criado, é necessário definir operadores que nos permitam transferir elementos de um mapa para outro. Isto é, vamos definir o operador

$\mathsf{Transfer}(b, g)$ que transfere uma borda b da fronteira da sua atual face para a fronteira de uma face qualquer g.

Mais precisamente, seja f a face situada à esquerda da borda b. Intuitivamente, o operador $\mathsf{Transfer}(b, g)$ corresponde a recortar a borda b da fronteira da face f, retirando-a daquela face. O buraco resultante na face f é implicitamente preenchido com um disco que é incorporado à mesma. Veja as figuras 4.7(a), (b) e (c). Adicionalmente, o operador recorta um disco da face g e cola, sobre o buraco resultante, a borda b. Veja as figura 4.7(d), (e) e (f). Note que todos os elementos situados na região à direita da borda b são transferidos junto com a mesma.

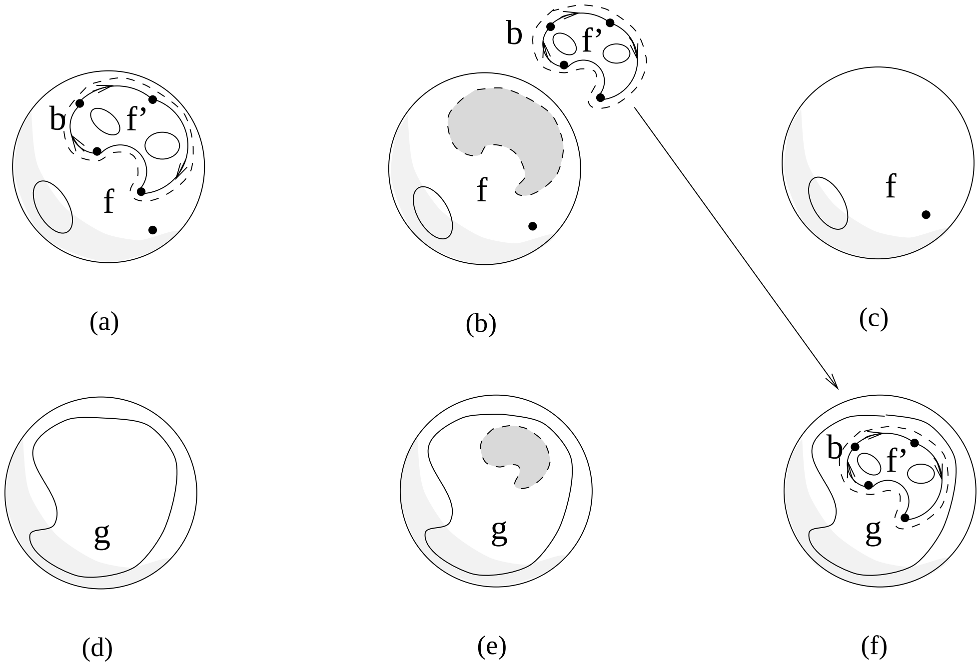


Figura 4.7: Operador topológico de transferência: $\mathsf{Transfer}(b, g)$

Em particular, se a borda b é um vértice isolado ou uma aresta solta, a operação $\mathsf{Transfer}(b, g)$ corresponde a simplesmente remover este elemento da face f e inserí-lo na face g.

Na estrutura de dados SMC, a implementação da operação $\mathsf{Transfer}(b, g)$ consiste apenas em remover a borda b do conjunto $f.\mathit{frontier}$ e incluí-la no conjunto $g.\mathit{frontier}$; e, além disso, alterar o apontador $b.face$ para indicar a face g. Mais precisamente,

procedure Transfer(b : Border; g : Face);
    $f \leftarrow b.face$;
    $f.frontier \leftarrow f.frontier \setminus \{b\}$;
    $g.frontier \leftarrow g.frontier \cup \{b\}$;
    $b.face \leftarrow g$;

É importante notar que a borda b (a ser transferida) e a face g (que vai receber a borda b) podem ou não pertencer a um mesmo mapa. No caso em que a borda b e a face g pertencem a mapas distintos, a operação de transferência procede exatamente como mostrado na figura 4.7, e neste caso, podemos garantir que os mapas resultantes continuam sendo mapas esféricos. Por outro lado, se a borda b e a face g pertencem a um mesmo mapa esférico, a execução de Transfer(b, g) pode resultar num mapa cuja superfície não é homeomorfa à esfera. Isto ocorre quando a face g está na parte da esfera à direita da borda b. Por exemplo, veja a figura 4.8: após a operação Transfer(b, g), o mapa original fica dividido em dois mapas, sendo que um deles tem a topologia de um toro.

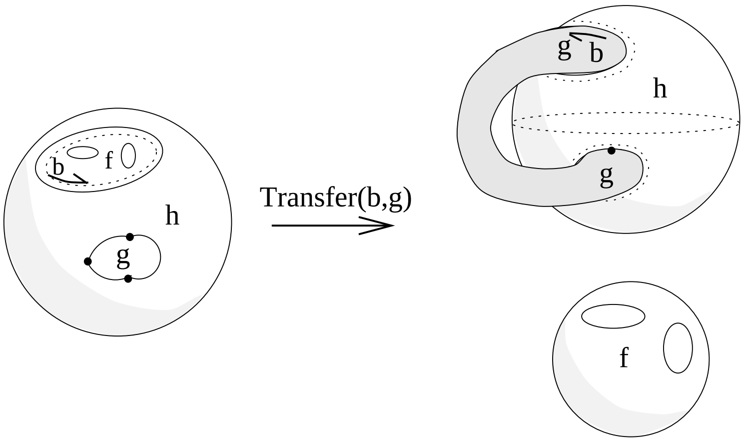


Figura 4.8: Resultado de Transfer(b, g) quando b e g são elementos de um mesmo mapa e a face g está na parte da esfera à direita da borda b.

Neste trabalho, a operação Transfer(b, g) sempre será aplicada a elementos (uma borda b e uma face g) pertencentes a mapas esféricos distintos, o que garante que os mapas resultantes são mapas esféricos.

Além disso, é importante ressaltar que Transfer é uma operação puramente topológica (combinatória) que não leva em consideração quaisquer propriedades geométricas dos elementos envolvidos. Portanto, cabe ao cliente desta operação garantir que a geometria da borda b é consistente com a sua nova posição na face g.

É fácil ver que esta operação pode ser realizada em tempo constante, desde que o conjunto de bordas de uma face seja representado através de uma estrutura de dados adequada à realização de operações de remoção, por exemplo, uma lista duplamente encadeada.

4.5 Operadores de conexão e desconexão

Vamos agora definir os operadores que nos permitem conectar e desconectar esquinas de um mapa $\mathcal{M}$, alterando os valores das funções $Onext$ e $Lnext$. Isto é, dadas duas esquinas c_1 e c_2, os operadores de conexão e desconexão alteram as órbitas destas esquinas sob a função $Onext$ — isto é, alteram os vértices $Org(c_1)$ e $Org(c_2)$ — e sob a função $Lnext$ — isto é, alteram as bordas $Bord(c_1)$ e $Bord(c_2)$. Em cada caso, se as órbitas são distintas, elas são agrupadas dando origem a uma única (nova) órbita; caso contrário, se as esquinas estão numa mesma órbita, esta órbita é dividida em duas novas órbitas.

Considerando todas as possíveis combinações, temos quatro casos que serão tratados por operadores distintos:

(i) $Org(c_1) \neq Org(c_2)$ e $Bord(c_1) \neq Bord(c_2)$: JoinVerticesJoinBorders — (seção 4.5.2);

(ii) $Org(c_1) = Org(c_2)$ e $Bord(c_1) = Bord(c_2)$: SplitVertexSplitBorder — (seção 4.5.3);

(iii) $Org(c_1) \neq Org(c_2)$ e $Bord(c_1) = Bord(c_2)$: JoinVerticesSplitBorder — (seção 4.5.4);

(iv) $Org(c_1) = Org(c_2)$ e $Bord(c_1) \neq Bord(c_2)$: SplitVertexJoinBorders — (seção 4.5.5).

4.5.1 Junção e divisão de vértices e bordas

Antes de apresentarmos os operadores propriamente ditos, vamos inicialmente especificar a maneira como os ciclos de esquinas em torno dos vértices e em torno das bordas são agrupados ou quebrados.

Por definição, ao agrupar dois vértices distintos v_1 e v_2, dados respectivamente pelas esquinas c_1 e c_2 (isto é, $v_1 = Org(c_1)$ e $v_2 = Org(c_2)$), a órbita da esquina c_2 sob $Onext$ é inserida imediatamente *após* a esquina c_1, e, por sua vez, a órbita da esquina c_1 sob $Onext$ é inserida imediatamente *após* a esquina c_2. Veja por exemplo a figura 4.9. Reciprocamente, se $Org(c_1) = Org(c_2)$, a órbita de $Onext$ em torno deste vértice é quebrada imediatamente *após* a esquina c_1 e imediatamente *após* a esquina c_2.

Analogamente, ao agrupar duas bordas distintas b_1 e b_2, dadas respectivamente pelas esquinas c_1 e c_2 (isto é, $b_1 = Bord(c_1)$ e $b_2 = Bord(c_2)$), as esquinas de $Bord(c_1)$ são inseridas imediatamente *antes* da esquina c_2, e as esquinas de $Bord(c_2)$ são inseridas imediatamente *antes* da esquina c_1. Isto é, a esquina que precedia c_1 (antes da operação) passa

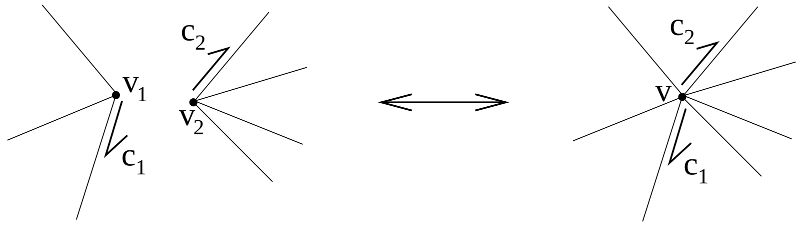


Figura 4.9: Junção e divisão de vértices

a preceder a esquina c_2 (depois da operação), e a esquina que precedia c_2 passa a preceder a esquina c_1. Veja por exemplo a figura 4.10. Reciprocamente, se $Bord(c_1) = Bord(c_2)$, esta borda é quebrada imediatamente *antes* das esquinas c_1 e c_2; mais precisamente, a esquina que precedia c_1 passa a preceder a esquina c_2 e vice-versa.

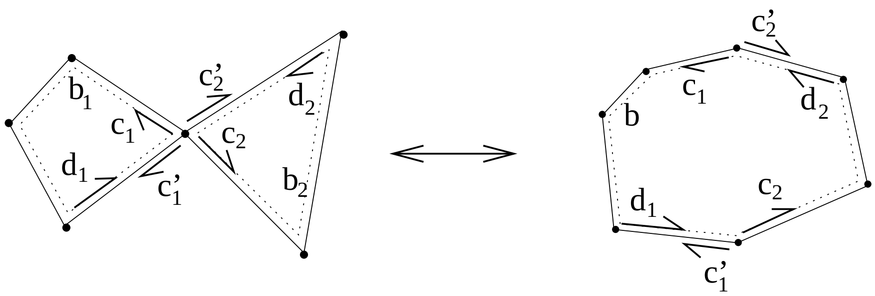


Figura 4.10: Junção e divisão de bordas

É fácil perceber que tanto a operação de junção como a operação de quebra das órbitas de *Onext* correspondem à uma mesma seqüência de atualizações nos campos *onext* dos objetos Corner envolvidos na operação. O mesmo vale para a junção e quebra das órbitas de *Lnext*. Mais precisamente, dadas duas esquinas c_1 e c_2, tanto no caso da junção como no caso da quebra dos ciclos de esquinas, os campos *onext* e *lnext* são atualizados conforme o seguinte procedimento:

procedure JoinOrSplitOrbits(c_1, c_2 : Corner)

$c'_1 \leftarrow c_1.onext;$	$c'_2 \leftarrow c_2.onext;$
$d_1 \leftarrow c'_1.lnext.onext;$	$d_2 \leftarrow c'_2.lnext.onext;$
$c_1.onext \leftarrow c'_2;$	$c_2.onext \leftarrow c'_1;$
$d_1.lnext \leftarrow c_2;$	$d_2.lnext \leftarrow c_1;$

4.5.2 O operador JoinVerticesJoinBorders

O operador JoinVerticesJoinBorders é utilizado quando $Org(c_1) \neq Org(c_2)$ e $Bord(c_1) \neq Bord(c_2)$. Neste caso, por simplicidade, vamos nos restringir a esquinas tais que $Left(c_1) = Left(c_2)$. Este operador junta os dois vértices e as duas bordas (isto é, junta as órbitas de *Onext* e de *Lnext*) dando origem a um novo vértice e a uma nova borda na fronteira da face $Left(c_1)$. Veja a figura 4.11. Com a restrição adotada, o operador JoinVerticesJoinBorders(c_1, c_2) não cria novas faces no mapa.

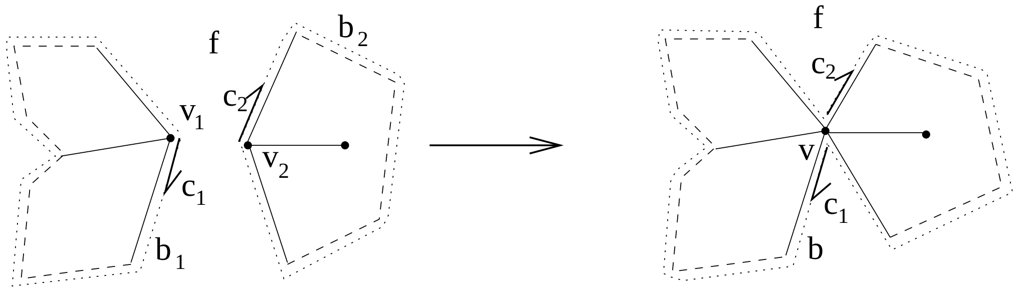


Figura 4.11: Operador JoinVerticesJoinBorders(c_1, c_2).

procedure JoinVerticesJoinBorders$(c_1, c_2$: Corner);
  $f \leftarrow Left(c_1)$; $b_1 \leftarrow c_1.bord$; $b_2 \leftarrow c_2.bord$;
  JoinOrSplitOrbits(c_1, c_2);
  $f.frontier \leftarrow f.frontier \setminus \{b_1, b_2\}$;
  $v \leftarrow$ **new**(Vertex);
  $b \leftarrow$ **new**(Border);
  $b.face \leftarrow f$; $b.desc \leftarrow c_1$;
  $f.frontier \leftarrow f.frontier \cup \{b\}$;
  $d \leftarrow c_1$; **repeat** $d.org \leftarrow v$; $d \leftarrow d.onext$ **until** $d = c_1$;
  $d \leftarrow c_1$; **repeat** $d.bord \leftarrow b$; $d \leftarrow d.lnext$ **until** $d = c_1$;

4.5.3 O operador SplitVertexSplitBorder

O operador SplitVertexSplitBorder é utilizado quando $Org(c_1) = Org(c_2)$ e $Bord(c_1) = Bord(c_2)$ (o que implica que $Left(c_1) = Left(c_2)$). Este operador divide o vértice e a borda, dando origem a dois novos vértices e a duas novas bordas. Veja figura 4.12. Assim como no caso anterior, este operador também não cria novas faces no mapa.

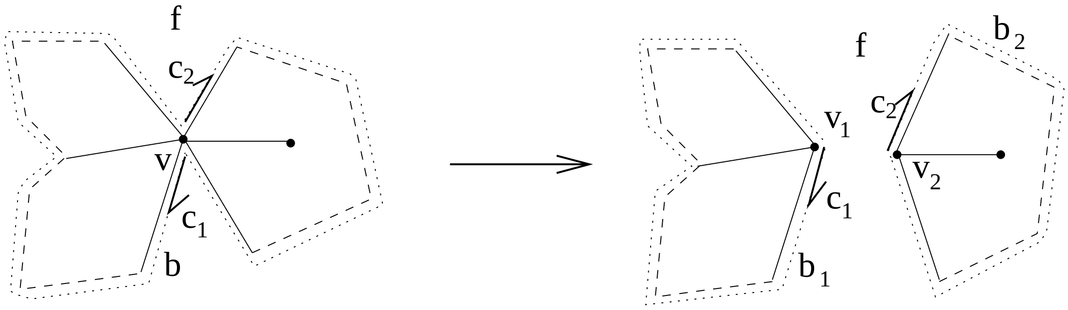


Figura 4.12: Operadores SplitVertexSplitBorder(c_1, c_2).

---

procedure SplitVertexSplitBorder$(c_1, c_2$: Corner$)$

$f \leftarrow Left(c_1)$; $b \leftarrow c_1.bord$;

JoinOrSplitOrbits(c_1, c_2);

$f.frontier \leftarrow f.frontier \setminus \{b\}$;

$b_1 \leftarrow$ **new**(Border); $b_2 \leftarrow$ **new**(Border);

$b_1.face \leftarrow f$; $b_1.desc \leftarrow c_1$;

$b_2.face \leftarrow f$; $b_2.desc \leftarrow c_2$;

$f.frontier \leftarrow f.frontier \cup \{b_1, b_2\}$;

$v_1 \leftarrow$ **new**(Vertex);

$v_2 \leftarrow$ **new**(Vertex);

$d \leftarrow c_1$; **repeat** $d.org \leftarrow v_1$; $d \leftarrow d.onext$ **until** $d = c_1$;

$d \leftarrow c_2$; **repeat** $d.org \leftarrow v_2$; $d \leftarrow d.onext$ **until** $d = c_2$;

$d \leftarrow c_1$; **repeat** $d.bord \leftarrow b_1$; $d \leftarrow d.lnext$ **until** $d = c_1$;

$d \leftarrow c_2$; **repeat** $d.bord \leftarrow b_2$; $d \leftarrow d.lnext$ **until** $d = c_2$;

4.5.4 O operador JoinVerticesSplitBorder

O operador JoinVerticesSplitBorder é usado quando $Org(c_1) \neq Org(c_2)$ e $Bord(c_1) = Bord(c_2)$ (o que implica que $Left(c_1) = Left(c_2)$). Este operador junta os dois vértices $v_1 = Org(c_1)$ e $v_2 = Org(c_2)$ e divide a borda $b = Bord(c_1) = Bord(c_2)$, dando origem a um novo vértice v e a duas novas bordas b_1 e b_2. Por definição, as bordas b_1 e b_2 são inseridas nas fronteiras de duas faces f_1 e f_2 fornecidas como parâmetros. Além disso, a borda original b é retirada da face $f = Left(c_1) = Left(c_2)$, e esta face, que agora faz parte de um novo mapa $\mathcal{M}'$ disjunto do mapa $\mathcal{M}$, é retornada como um sub-produto da operação. Veja a figura 4.13.

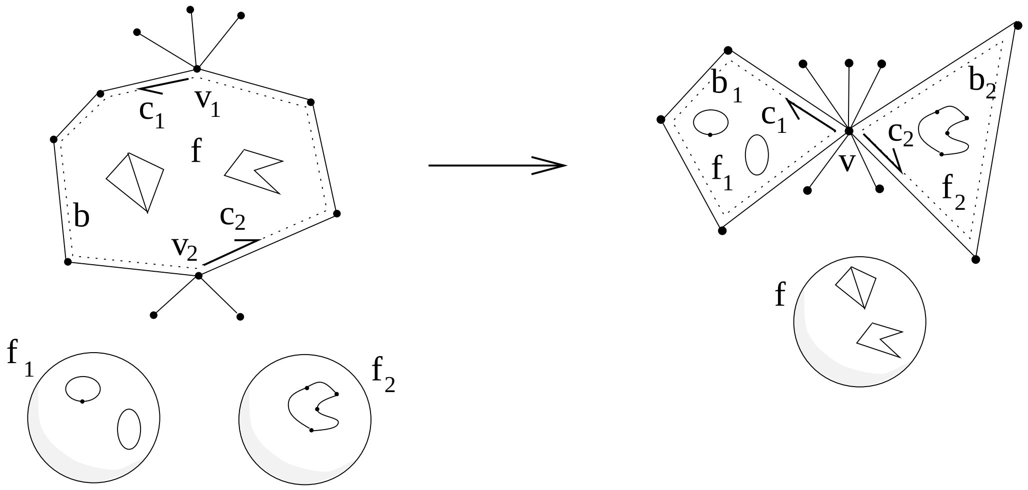


Figura 4.13: Operador $\mathsf{JoinVerticesSplitBorder}(c_1, c_2, f_1, f_2)$.

---

procedure $\mathsf{JoinVerticesSplitBorder}(c_1, c_2 : \mathsf{Corner};\ f_1, f_2 : \mathsf{Face}) : \mathsf{Face};$

$f \leftarrow Left(c_1)$; $\quad b \leftarrow c_1.bord$;

$\mathsf{JoinOrSplitOrbits}(c_1, c_2)$;

$f.frontier \leftarrow f.frontier \setminus \{b\}$;

$b_1 \leftarrow$ **new**(Border); $\quad b_2 \leftarrow$ **new**(Border);

$b_1.face \leftarrow f_1$; $\quad b_1.desc \leftarrow c_1$; $\quad f_1.frontier \leftarrow f_1.frontier \cup \{b_1\}$;

$b_2.face \leftarrow f_2$; $\quad b_2.desc \leftarrow c_2$; $\quad f_2.frontier \leftarrow f_2.frontier \cup \{b_2\}$;

$v \leftarrow$ **new**(Vertex);

$d \leftarrow c_1$; **repeat** $d.org \leftarrow v$; $d \leftarrow d.onext$ **until** $d = c_1$;

$d \leftarrow c_1$; **repeat** $d.bord \leftarrow b_1$; $d \leftarrow d.lnext$ **until** $d = c_1$;

$d \leftarrow c_2$; **repeat** $d.bord \leftarrow b_2$; $d \leftarrow d.lnext$ **until** $d = c_2$;

return f;

É importante observar que quaisquer outras bordas originalmente presentes nas faces f, f_1 e f_2 permanecem nestas faces após a operação. Além disso, para que o mapa $\mathcal{M}$, resultante desta operação, ainda seja um mapa esférico, as faces f_1 e f_2 (fornecidas como parâmetros) devem ser faces de mapas $\mathcal{M}_1$ e $\mathcal{M}_2$ disjuntos entre si, e ambos devem ser disjuntos do mapa $\mathcal{M}$.

4.5.5 O operador SplitVertexJoinBorders

O operador SplitVertexJoinBorders é utilizado quando $Org(c_1) = Org(c_2)$ e $Bord(c_1) \neq Bord(c_2)$. Em mapas esféricos, estas condições implicam que $Left(c_1) \neq Left(c_2)$. Este operador divide o vértice $v = Org(c_1) = Org(c_2)$ em dois novos vértices v_1 e v_2 e junta as duas bordas $b_1 = Bord(c_1)$ e $b_2 = Bord(c_2)$, dando origem a uma nova borda b. Por definição, as bordas b_1 e b_2 são retiradas das suas respectivas faces $f_1 = Left(c_1)$ e $f_2 = Left(c_2)$, e a nova borda b é inserida na fronteira de uma face f fornecida como parâmetro. Além disso, as faces f_1 e f_2 são retornadas como sub-produtos da operação, sendo que estas duas faces passam a constituir dois novos mapas $\mathcal{M}_1$ e $\mathcal{M}_2$, disjuntos entre si e disjuntos do mapa original $\mathcal{M}$. Veja figura 4.14.

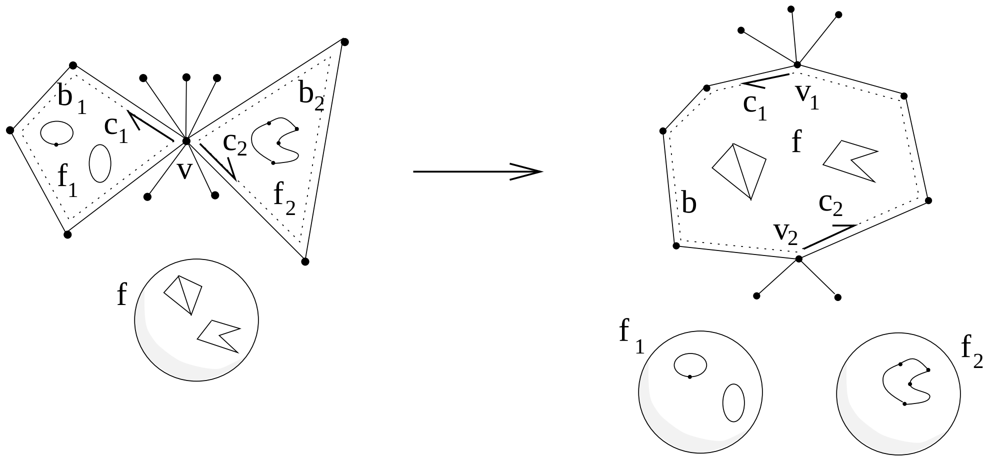


Figura 4.14: Operador SplitVertexJoinBorders(c_1, c_2, f).

---

procedure SplitVertexJoinBorders$(c_1, c_2$: Corner; f : Face) : (Face,Face);

$f_1 \leftarrow Left(c_1)$; $f_2 \leftarrow Left(c_2)$;

$b_1 \leftarrow c_1.bord$; $b_2 \leftarrow c_2.bord$;

$f_1.frontier \leftarrow f_1.frontier \setminus \{b_1\}$; $f_2.frontier \leftarrow f_2.frontier \setminus \{b_2\}$;

JoinOrSplitOrbits(c_1, c_2);

$b \leftarrow$ **new**(Border); $b.face \leftarrow f$; $b.desc \leftarrow c_1$;

$f.frontier \leftarrow f.frontier \cup \{b\}$;

$v_1 \leftarrow$ **new**(Vertex); $v_2 \leftarrow$ **new**(Vertex);

$d \leftarrow c_1$; **repeat** $d.org \leftarrow v_1$; $d \leftarrow d.onext$ **until** $d = c_1$;

$d \leftarrow c_2$; **repeat** $d.org \leftarrow v_2$; $d \leftarrow d.onext$ **until** $d = c_2$;

$d \leftarrow c_1$; **repeat** $d.bord \leftarrow b$; $d \leftarrow d.lnext$ **until** $d = c_1$;

return (f_1, f_2);

De modo análogo ao operador JoinVerticesSplitBorder, quaisquer outras bordas originalmente presentes nas faces f, f_1 e f_2 permanecem nas suas respectivas faces após a operação. Além disso, para que o mapa $\mathcal{M}$ resultante desta operação, ainda seja um mapa esférico, a face f (fornecida como parâmetro) deve ser uma face de um mapa $\mathcal{M}'$ disjunto do mapa $\mathcal{M}$.

4.5.6 Complexidade dos operadores de conexão e desconexão

Conforme vimos nas seções anteriores, todos os quatro operadores de conexão e desconexão envolvem a criação de novos vértices e/ou de novas bordas. Por isso, em cada operador devemos percorrer todas as esquinas d das órbitas afetadas, atualizando os apontadores $d.org$ e $d.bord$. Portanto, o custo de cada operador é proporcional ao número total de esquinas nas órbitas $Onext$ e $Lnext$ das esquinas c_1 e c_2 envolvidas na operação.

4.5.7 Invertibilidade dos operadores de conexão e desconexão

Como podemos verificar facilmente, exceto pela criação de vértices e bordas, os quatro operadores de conexão e desconexão são todos inversíveis. Mais especificamente, os operadores JoinVerticesJoinBorders e SplitVertexSplitBorder são inversos entre si; e o mesmo ocorre com os operadores JoinVerticesSplitBorder e SplitVertexJoinBorders. Ou seja, dadas duas esquinas c_1 e c_2 num mapa $\mathcal{M}$ tais que $Org(c_1) \neq Org(c_2)$ e $Bord(c_1) \neq Bord(c_2)$, então a sequência de operações

$$\begin{array}{l} \mathsf{JoinVerticesJoinBorders}(c_1, c_2); \\ \mathsf{SplitVertexSplitBorder}(c_1, c_2); \end{array}$$

não altera a topologia do mapa $\mathcal{M}$.

Analogamente, dadas duas esquinas c_1 e c_2 num mapa $\mathcal{M}$ tais que $Org(c_1) \neq Org(c_2)$ e $Bord(c_1) = Bord(c_2)$, então a sequência de operações

$$\begin{array}{rcl} f_1 & \leftarrow & \mathsf{MakeFace}(); \\ f_2 & \leftarrow & \mathsf{MakeFace}(); \\ f & \leftarrow & \mathsf{JoinVerticesSplitBorder}(c_1, c_2, f_1, f_2); \\ (f_1, f_2) & \leftarrow & \mathsf{SplitVertexJoinBorders}(c_1, c_2, f); \end{array}$$

não altera a topologia do mapa $\mathcal{M}$.

4.6 Suficiência dos operadores topológicos

Observe que qualquer mapa esférico pode ser "desmontado" (isto é, reduzido a um conjunto de mapas elementares) por meio dos operadores de desconexão e transferência. Mais precisamente, o "desmonte" de um mapa pode ser realizado da seguinte forma: enquanto houver duas esquinas distintas com uma mesma origem sobre arestas-arco, isto é, enquanto houver esquinas c_1 e c_2 tais que $c_1 \neq c_2$ e $Org(c_1) = Org(c_2) \neq \varnothing$, utilizamos um dos operadores SplitVertexSplitBorder ou SplitVertexJoinBorders para quebrar o vértice em comum destas duas esquinas, separando-as. Ao fim deste processo, teremos um ou mais mapas nos quais toda borda tem exatamente um elemento: um vértice isolado ou uma aresta (arco ou oval). Utilizando o operador Transfer, podemos transferir cada uma destas bordas para um mapa trivial criado com o operador MakeFace, obtendo assim um conjunto de mapas elementares.

Não é difícil perceber que este processo de "desmonte" de um mapa pode ser invertido. Para isto, basta utilizar os operadores de criação (MakeFace, MakeVertex, MakeArcEdge, MakeOvalEdge) para obter os mapas elementares resultantes do "desmonte"; e, para cada operação de desconexão e transferência realizada, aplicar a respectiva operação inversa, na ordem reversa.

Isto nos permite concluir que o conjunto de operadores topológicos definidos nas seções anteriores é suficiente para construir qualquer mapa esférico.

4.7 Operadores auxiliares

Embora o conjunto de operadores topológicos definido anteriormente seja suficiente para manipular a topologia dos mapas esféricos, por questões de eficiência e simplicidade vamos definir dois operadores auxiliares denominados BreakEdge e Connect.

4.7.1 O operador BreakEdge

Dada uma esquina c tal que $Edge(c) \neq \varnothing$, o objetivo deste operador é quebrar a aresta $Edge(c)$, inserindo sobre ela um novo vértice. A figura 4.15 ilustra o resultado da aplicação deste operador.

É fácil ver que esta operação pode ser realizada utilizando-se os operadores de criação, transferência e conexão definidos anteriormente. Entretanto, isto exigiria a criação de diversos elementos (objetos na estrutura SMC) que seriam posteriormente descartados. Além disso, diversas operações de transferências teriam que ser realizadas para recolocar as demais bordas das faces adjacentes à aresta em questão de volta nas devidas faces. Portanto, para evitar estas operações desnecessárias, convém implementar o operador

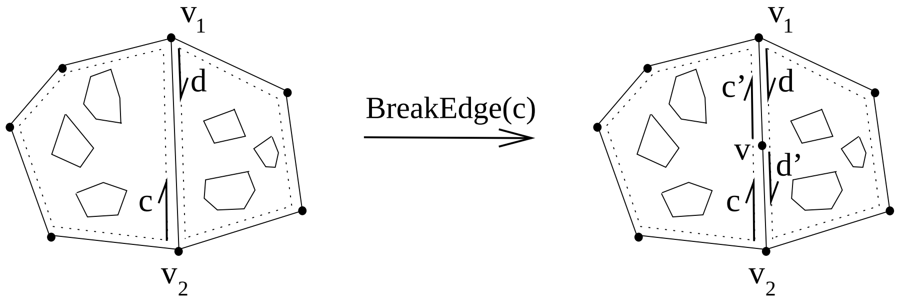


Figura 4.15: OperadorBreakEdge

BreakEdge(c) diretamente.

Este operador cria um novo objeto Vertex e (em geral), dois novos objetos do tipo Corner, e atualiza os apontadores afetados pela operação.

Um caso particular ocorre quando a aresta $Edge(c)$ é uma aresta oval; neste caso, não precisamos criar novos objetos do tipo Corner, basta atualizar o campo que armazena o vértice das esquinas c e $Sym(c)$. Mais precisamente,

```
procedure BreakEdge(c : Corner) : Corner;
  d ← Sym(c);
  v ← new(Vertex);
  if Org(c) = ∅ then {Edge(c) é uma aresta oval}
    c.org ← v;                        d.org ← v;
  else
    c' ← new(Corner);                 d' ← new(Corner);
    c'.org ← v;                       d'.org ← v;
    c'.edge ← new(Edge);              d'.edge ← new(Edge);
    c'.edge.props ← c.edge.props;     d'.edge.props ← d.edge.props;
    c'.bord ← c.bord;                 d'.bord ← d.bord;
    c'.onext ← d'                     d'.onext ← c';
    c'.lnext ← c.lnext;               d'.lnext ← d.lnext;
    c.lnext ← c';                     d.lnext ← d';
  return c.lnext;
```

É fácil perceber que esta operação pode ser executada em tempo constante.

4.7.2 O operador Connect

O operador Connect acrescenta uma nova aresta-arco num mapa, ligando dois vértices de uma mesma face. Mais precisamente, dadas duas esquinas c_1 e c_2 tais que $Left(c_1) = Left(c_2)$, $Org(c_1) \neq Org(c_2)$, $Org(c_1) \neq \varnothing$ e $Org(c_2) \neq \varnothing$, a operação Connect$(c_1, c_2)$ cria uma nova aresta ligando os vértices $Org(c_1)$ e $Org(c_2)$ através da face $f = Left(c_1) = Left(c_2)$. Veja figura 4.16.

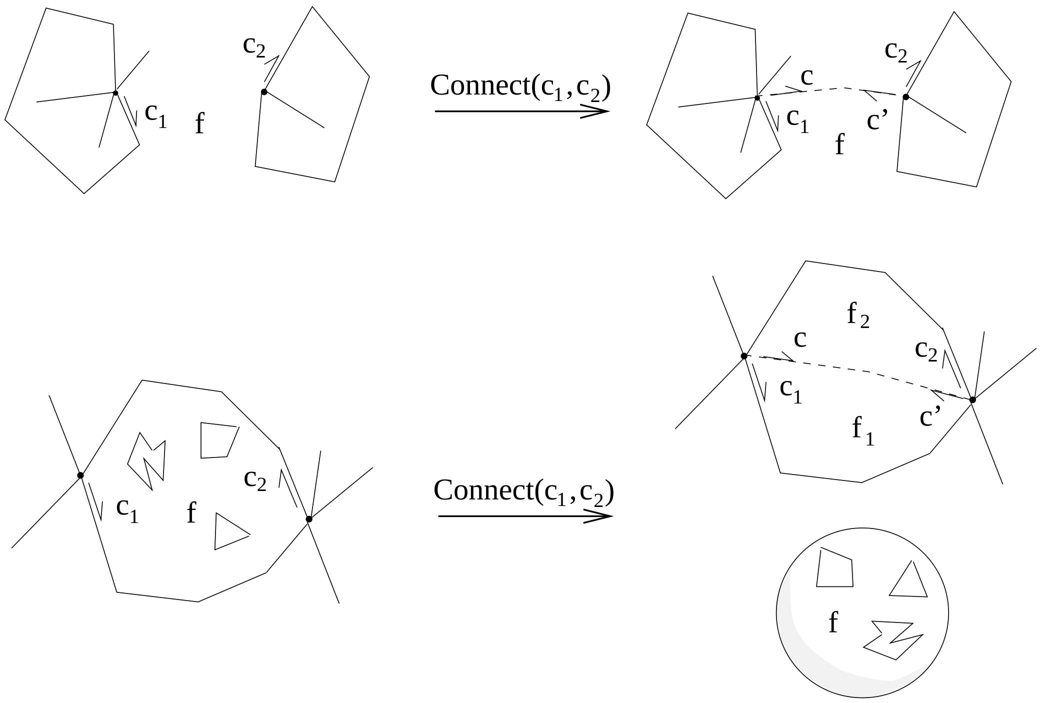


Figura 4.16: Operador Connect

As esquinas c_1 e c_2 podem pertencer a bordas distintas ou a uma mesma borda. No primeiro caso, este operador junta as bordas, que permanecem na fronteira da mesma face f original. No segundo caso, a face f é retirada do mapa (formando um novo mapa $\mathcal{M}'$) e é substituída por duas novas faces f_1 e f_2, separadas pela nova aresta. Na verdade, estas operações são efetuadas pelos operadores JoinVerticesJoinBorders e JoinVerticesSplitBorder conforme o caso.

procedure Connect(c_1, c_2 : Corner)
    $c \leftarrow$ MakeArcEdge();
    $c' \leftarrow Sym(c)$;
    Transfer($Bord(c), f$);
    JoinVerticesJoinBorders(c_1, c);
    if $Bord(c') \neq Bord(c_2)$ **then**
        JoinVerticesJoinBorders(c_2, c');
    else
        $f_1 \leftarrow$ MakeFace();
        $f_2 \leftarrow$ MakeFace();
        $f \leftarrow$ JoinVerticesSplitBorder(c_2, c', f_1, f_2);

Capítulo 5

Geometria projetiva orientada

A partir de agora, vamos tratar das questões relacionadas à representação da geometria dos elementos de um mapa esférico. Para isso, vamos apresentar um breve resumo da geometria projetiva orientada, sendo que por questões de espaço, neste resumo vamos frequentemente recorrer a definições informais. As definições formais incluindo as demonstrações das propriedades aqui anunciadas podem ser encontradas no livro de Stolfi [33].

Como se sabe, a geometria de $\mathbb{R}^3$ fica bastante simplificada se tratarmos $\mathbb{R}^3$ como um subespaço de um *espaço projetivo* $\mathbb{P}^3$ [7, 33] o qual é composto pelos pontos ordinários de $\mathbb{R}^3$ mais os *pontos no infinito* onde, por definição, as retas e planos paralelos se interceptam. Esta extensão elimina muitos casos especiais que devem ser tratados isoladamente nos algoritmos geométricos e além disso, permite a unificação de muitos algoritmos que, no modelo cartesiano, parecem não ter a menor relação entre si.

Apesar destas vantagens, o modelo projetivo apresenta um inconveniente: muitos algoritmos da geometria cartesiana são baseados em operações que testam a posição relativa entre dois elementos, por exemplo, a posição de um ponto em relação a um plano, que consiste em verificar se um ponto pertence a um dos semi-espaços determinado por um plano. Entretanto, em geometria projetiva, este tipo teste não faz sentido, pois os dois semi-espaços determinados por um plano são conectados pelos pontos no infinito.

Para contornar este problema, a solução é considerar o *espaço projetivo orientado* $\mathbb{T}^3$, que consiste de duas cópias separadas de $\mathbb{R}^3$ mais os pontos no infinito. A geometria de $\mathbb{T}^3$, assim como a de $\mathbb{P}^3$, é definida exclusivamente pelas relações entre seus *elementos*: pontos, retas e planos. A vantagem deste modelo é que ele incorpora todas as conveniências de $\mathbb{P}^3$ sem perder as características de orientabilidade e separabilidade que são importantes para a geometria cartesiana.

5.1 Pontos

Um *ponto* p de $\mathbb{T}^3$ é, por definição, uma quádrupla não-nula de números $[p_0, p_1, p_2, p_3]$, *as coordenadas homogêneas* do ponto, sendo que $[p_0, p_1, p_2, p_3]$ e $[\lambda p_0, \lambda p_1, \lambda p_2, \lambda p_3]$, para todo $\lambda > 0$, representam o mesmo ponto. É importante ressaltar que $p = [p_0, p_1, p_2, p_3]$ e $q = [-p_0, -p_1, -p_2, -p_3]$ representam pontos distintos; dizemos que estes pontos são *antípodas* entre si, o que denotamos por $p = \neg q$.

Por definição, *as coordenadas cartesianas* de um ponto $p = [p_0, p_1, p_2, p_3]$ de $\mathbb{T}^3$, com $p_0 \neq 0$, são $(p_1/p_0, p_2/p_0, p_3/p_0)$. Neste caso, dizemos que p é um *ponto finito*; se $p_0 > 0$ dizemos que p é um ponto no *aquém* de $\mathbb{T}^3$ e caso contrário, se $p_0 < 0$ dizemos que p é um ponto no *além*. Note que p e $\neg p$ têm as mesmas coordenadas cartesianas, mas são pontos distintos de $\mathbb{T}^3$. Reciprocamente, para cada ponto com coordenadas cartesianas (x, y, z), há dois pontos distintos de $\mathbb{T}^3$, a saber $[1, x, y, z]$ e $[-1, -x, -y, -z]$. Desta forma, o além e o aquém de $\mathbb{T}^3$ podem ser vistos como duas cópias de $\mathbb{R}^3$ contidas em $\mathbb{T}^3$.

Note que a origem do aquém é $O = [1, 0, 0, 0]$, e a origem do além é o ponto $\neg O = [-1, 0, 0, 0]$. Observe que em geral o ponto $\neg p$ é diferente do ponto $\overline{p} = [p_0, -p_1, -p_2, -p_3]$, o ponto simétrico a p em relação à origem O. Na verdade, as únicas exceções são os pontos no infinito.

A topologia de $\mathbb{T}^3$ é definida de tal forma que uma função $f(t) = [p_0(t), p_1(t), p_2(t), p_3(t)]$ de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{T}^3$ é contínua se $p_0(t)$, $p_1(t)$, $p_2(t)$ e $p_3(t)$ são funções reais contínuas que não são simultaneamente nulas para nenhum valor de t.

Podemos com isso dizer que um ponto de $\mathbb{T}^3$ da forma $[0, x, y, z]$ é um *ponto no infinito*, na direção do vetor cartesiano (x, y, z) quando visto de qualquer outro ponto no aquém. Por outro lado, visto de um ponto no além, dizemos que o mesmo ponto está no infinito na direção $(-x, -y, -z)$.

5.2 Planos

Um *plano* α em $\mathbb{T}^3$ é, por definição, uma quádrupla não-nula de números $\langle \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$, os *coeficientes homogêneos* do plano, sendo que $\langle \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$ e $\langle \lambda\alpha_0, \lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \lambda\alpha_3 \rangle$, para todo $\lambda > 0$, representam o mesmo plano. É importante ressaltar que $\langle \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$ e $\alpha' = \langle -\alpha_0, -\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_3 \rangle$ são planos distintos; dizemos que estes planos são *opostos* entre si, o que denotamos por $\alpha = \neg\alpha'$.

Por definição, o plano α é *incidente* a todo ponto $[p_0, p_1, p_2, p_3]$ de $\mathbb{T}^3$ tal que

$$\alpha_0 p_0 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 = 0$$

Dizemos que dois planos são *coincidentes* se eles incidem sobre o mesmo conjunto de pontos. Portanto, dois planos são coincidentes se eles são iguais ou opostos entre si.

Em geral, o conjunto de pontos que são incidentes a um plano consiste de duas cópias de um mesmo plano euclidiano: uma cópia no aquém e outra no além de $\mathbb{T}^3$, mais um conjunto de pontos no infinito nas direções paralelas ao plano. As exceções são os planos $\Omega_2 = \langle 1, 0, 0, 0 \rangle$ e o seu oposto $\neg\Omega_2$, denominados *planos no infinito*, que são incidentes a todos os pontos no infinito e a apenas estes pontos.

Todo plano α divide $\mathbb{T}^3$ em dois semi-espaços: o *lado positivo* e o *lado negativo* de α. Por definição, o lado positivo consiste de todos os pontos $[p_0, p_1, p_2, p_3]$ de $\mathbb{T}^3$ tais que $\alpha_0 p_0 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 > 0$. A *posição* de um ponto p em relação a α, denotada por $p \diamond \alpha$, é dada por

$$p \diamond \alpha = sign(\alpha_0 p_0 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3)$$

Note que $p \diamond \alpha = +1$ se e somente se $(\neg p) \diamond \alpha = -1$. Portanto, o lado positivo de α consiste de um semi-espaço cartesiano no aquém e do semi-espaço complementar no além (mais um subconjunto dos pontos no infinito).

A *orientação externa* de um plano, definida por '$\diamond$', pode ser visualizada como uma seta direcionada do semi-espaço negativo para o positivo. Um plano α também tem uma *orientação interna*, a qual pode ser visualizada através de uma pequena seta circular desenhada sobre o plano. Veja figura figure 5.1. Deslocando esta seta ao longo do plano

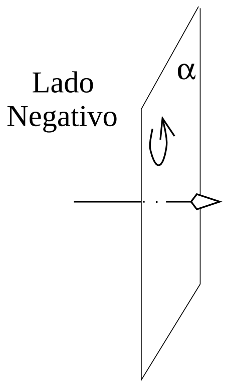


Figura 5.1: Orientações (externa e interna) de um plano.

podemos determinar se o sentido de rotação em torno de um ponto do plano é *positivo* (concordando com o arco) ou *negativo* (em sentido contrário ao arco).

As orientações interna e externa de um plano em $\mathbb{T}^3$ não são independentes. Por definição, o lado positivo do plano é aquele de onde, no aquém, "vemos" o arco circular orientado em sentido anti-horário, supondo os eixos cartesianos nas posições convencionais.

É importante observar que as orientações externas de um mesmo plano, em dois pontos antípodas, têm sentidos opostos; e o mesmo se aplica às orientações internas.

5.3 Retas

Informalmente, uma *reta finita* de $\mathbb{T}^3$ consiste de duas cópias de uma mesma reta cartesiana de $\mathbb{R}^3$: uma cópia no aquém e outra no além, mais os dois pontos no infinito nas direções paralelas a estas retas. Uma *reta no infinito* consiste de todos os pontos no infinito nas direções paralelas a um mesmo plano.

Por definição, em $\mathbb{T}^3$ uma reta tem uma orientação *externa* e uma *interna*. A orientação *interna* define o sentido positivo de percurso ao longo da reta, e a orientação *externa* define o sentido positivo de rotação em torno da reta. Estas orientações podem ser respectivamente visualizadas como uma seta colocada sobre a reta e como um arco circular contornando a reta. Veja figura 5.2.

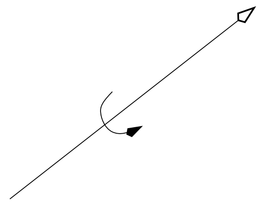


Figura 5.2: Orientações (externa e interna) de uma reta.

Como no caso dos planos, as orientações interna e externa de uma reta em $\mathbb{T}^3$ não são independentes. Por definição, elas satisfazem a regra da mão direita, supondo os eixos cartesianos nas posições convencionais.

Dizemos que duas retas l e m são *opostas* entre si, se elas são a mesma reta euclidiana com orientações interna e externa opostas; o que denotamos por $l = \neg m$. Além disso, dizemos que duas retas são *coincidentes* se elas incidem sobre o mesmo conjunto de pontos, isto é, se elas são iguais ou opostas entre si.

5.4 Operações *junção* e *encontro*

As operações básicas da geometria projetiva orientada são *junção* e *encontro*, denotadas respectivamente por $\vee$ e $\wedge$. Em $\mathbb{T}^3$, a operação *junção* devolve a reta $p \vee q$ conectando os dois pontos p e q, ou o plano $p \vee l$ que contém o ponto p e a reta l. Por outro lado, a operação *encontro* retorna a reta $\alpha \wedge \beta$ comum aos dois planos α e β, ou o ponto $l \wedge \alpha$ onde a reta l intercepta o plano α. Em todos estes casos, as orientações dos objetos resultantes destas operações ficam precisamente estabelececidas a partir das orientações dos operandos. Por exemplo, na figura 5.3 mostramos a parte no aquém dos elementos resultantes das operações: $p \vee q$, $p \vee l$, $\alpha \wedge \beta$ e $l \wedge \alpha$.

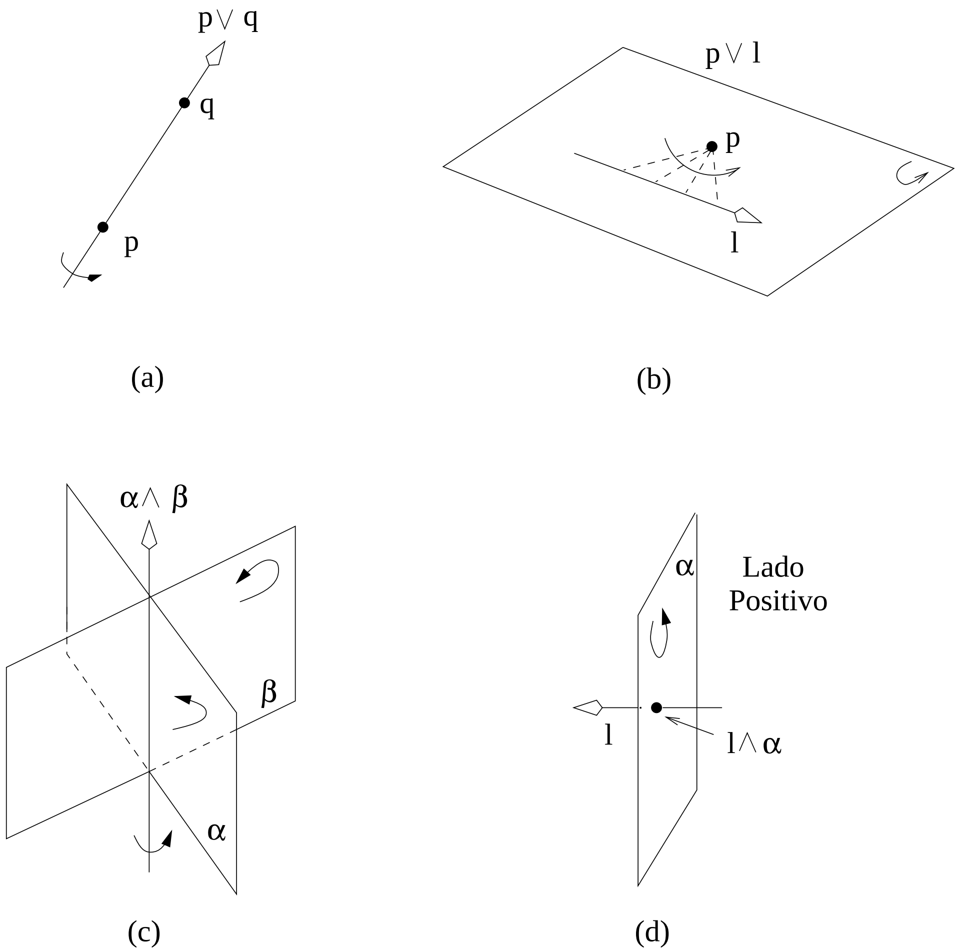


Figura 5.3: Operações *junção* e *encontro* (parte no aquém): (a) $p \vee q$; (b) $p \vee l$; (c) $\alpha \wedge \beta$; (d) $l \wedge \alpha$.

A orientação da reta $l = p \vee q$ é definida como sendo a direção de p para q que segue pelo menor segmento que une estes dois pontos. Veja figura 5.3(a). No caso do plano $p \vee l$, a orientação deste plano é definida de tal forma que l gira em torno de p no sentido positivo; mais precisamente, movendo um ponto q sobre l no sentido positivo, o sentido de rotação da reta $p \vee q$ em torno do ponto p define a orientação do plano $p \vee l$. Veja figura 5.3(b).

Para visualizar a orientação da reta $l = \alpha \wedge \beta$, podemos imaginar o plano α rodando em torno da reta euclidiana $\alpha \cap \beta$, em direção ao plano β, pelo menor ângulo que faz a posição e a orientação destes planos coincidirem. O sentido desta rotação define a orientação externa da reta l; e a orientação interna fica então determinada pela regra da mão direita. Veja figura 5.3(c). Note que $\alpha \wedge \beta = \neg(\beta \wedge \alpha)$; isto é, em $\mathbb{T}^3$ a interseção de dois planos é anti-comutativa.

Finalmente, por definição, $l \wedge \alpha$ é o ponto onde l sai do lado positivo de α. Veja figura 5.3(d). Por consistência, é conveniente definir $l \wedge \alpha = \alpha \wedge l$; isto é, a interseção entre uma reta e um plano é comutativa.

Como podemos verificar, para quaisquer a e b em $\mathbb{T}^3$ temos que

$$\begin{aligned}(\neg a) \vee b &= a \vee (\neg b) = \neg(a \vee b)\\(\neg a) \wedge b &= a \wedge (\neg b) = \neg(a \wedge b)\end{aligned}$$

Com estas convenções, $\vee$ e $\wedge$ são operações associativas. Portanto, o plano determinado por três pontos não colineares p, q e r é dado por

$$p \vee q \vee r = (p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$$

Analogamente, o ponto de interseção de três planos α, β e γ, que não têm uma reta em comum, é dado por

$$\alpha \wedge \beta \wedge \gamma = (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$$

5.5 Fórmulas algébricas

Dados três pontos não colineares $p = [p_0, p_1, p_2, p_3]$, $q = [q_0, q_1, q_2, q_3]$ e $r = [r_0, r_1, r_2, r_3]$, os coeficientes do plano determinado por estes três pontos são

$$p \vee q \vee r = \left\langle -\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} p_0 & p_2 & p_3 \\ q_0 & q_2 & q_3 \\ r_0 & r_2 & r_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} p_0 & p_1 & p_3 \\ q_0 & q_1 & q_3 \\ r_0 & r_1 & r_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} p_0 & p_1 & p_2 \\ q_0 & q_1 & q_2 \\ r_0 & r_1 & r_2 \end{vmatrix} \right\rangle \tag{5.1}$$

As coordenadas homogêneas do ponto de interseção entre três planos $\alpha = \langle \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$, $\beta = \langle \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \rangle$ e $\gamma = \langle \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \rangle$, que não têm uma reta em comum, são

$$\alpha \wedge \beta \wedge \gamma = \left[\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_0 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_0 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_3 \\ \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} \right] \tag{5.2}$$

5.6 Coeficientes de Plücker de uma reta

Para estabelecer as fórmulas algébricas das operações $\vee$ e $\wedge$ envolvendo retas, precisamos primeiro estabelecer como uma reta de $\mathbb{T}^3$ pode ser algebricamente representada.

Dados dois planos $\alpha = \langle \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$ e $\beta = \langle \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \rangle$, a reta $l = \alpha \wedge \beta$ pode ser precisamente representada pelos seis coeficientes $\langle l_{01}, l_{02}, l_{12}, l_{03}, l_{13}, l_{23} \rangle$ onde

$$l_{ij} = \det \begin{vmatrix} \alpha_i & \alpha_j \\ \beta_i & \beta_j \end{vmatrix} = \alpha_i \beta_j - \alpha_j \beta_i$$

Estes seis números são denominados os *coeficientes de Plücker* [33, 9] da reta l. Por simplicidade, vamos escrever $l = \langle l_0, l_1, l_2, l_3, l_4, l_5 \rangle$, com os determinantes implicitamente ordenados conforme definido acima.

Os coeficientes de Plücker de uma reta não são independentes: uma sêxtupla $\langle l_0, .. l_5 \rangle$ representa uma reta de $\mathbb{R}^3$ se e somente se

$$l_0 l_5 - l_1 l_4 + l_2 l_3 = 0 \tag{5.3}$$

Além disso, estes coeficientes são homogêneos, isto é, para todo $\lambda > 0$, $\langle l_0, .. l_5 \rangle$ e $\langle \lambda l_0, .. \lambda l_5 \rangle$ representam a mesma reta. Observe que $\langle -l_0, .. -l_5 \rangle$ é a reta oposta a $\langle l_0, .. l_5 \rangle$.

Dados dois pontos $p = [p_0, .. p_3]$ e $q = [q_0, .. q_3]$, dois planos $\alpha = \langle \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$ e $\beta = \langle \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \rangle$ e uma reta $l = \langle l_0, .. l_5 \rangle$, pode-se demonstrar que

$$\begin{aligned}
\alpha \wedge \beta &= \left\langle \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 \\ \beta_0 & \beta_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_2 \\ \beta_0 & \beta_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_3 \\ \beta_0 & \beta_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} \right\rangle \\
&= \langle \alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0, \alpha_0\beta_2 - \alpha_2\beta_0, \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1, \alpha_0\beta_3 - \alpha_3\beta_0, \alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1, \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 \rangle \\
l \wedge \alpha &= [-l_2\alpha_3 + l_4\alpha_2 - l_5\alpha_1, l_1\alpha_3 - l_3\alpha_2 + l_5\alpha_0, -l_0\alpha_3 + l_3\alpha_1 - l_4\alpha_0, l_0\alpha_2 - l_1\alpha_1 + l_2\alpha_0] \\
p \vee l &= \langle l_0p_1 + l_1p_2 + l_3p_3, -l_0p_0 + l_2p_2 + l_4p_3, -l_1p_0 - l_2p_1 + l_5p_3, -l_3p_0 - l_4p_1 - l_5p_2 \rangle \\
p \vee q &= \left\langle \begin{vmatrix} p_2 & p_3 \\ q_2 & q_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} p_1 & p_3 \\ q_1 & q_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} p_0 & p_3 \\ q_0 & q_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} p_0 & p_2 \\ q_0 & q_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} p_0 & p_1 \\ q_0 & q_1 \end{vmatrix} \right\rangle \\
&= \langle p_2q_3 - p_3q_2, p_3q_1 - p_1q_3, p_0q_3 - p_3q_0, p_1q_2 - p_2q_1, p_2q_0 - p_0q_2, p_0q_1 - p_1q_0 \rangle
\end{aligned} \tag{5.4}$$

É importante ressaltar que as fórmulas (5.1), (5.2) e (5.4) retornam a n-túpla nula $\langle 0, .. 0 \rangle = \langle \mathbf{0} \rangle$ quando a operação não está definida. Por exemplo, se α e β são coincidentes então $\alpha \wedge \beta = \langle 0, 0, 0, 0, 0, 0 \rangle = \langle \mathbf{0} \rangle$. Analogamente, se l é uma reta no plano α então $l \wedge \alpha = [0, 0, 0, 0] = [\mathbf{0}]$.

A partir destas fórmulas, é fácil mostrar que a distância euclidiana entre o plano α e a origem O, denotada por $dist(\alpha, O)$, e a distância euclidiana entre a reta l e a origem, denotada por $dist(l, O)$, são dadas por

$$\begin{aligned}
dist(\alpha, O) &= \sqrt{\frac{\alpha_0^2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}} \\
dist(l, O) &= \sqrt{\frac{l_0^2 + l_1^2 + l_3^2}{l_2^2 + l_4^2 + l_5^2}}
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Daí, podemos concluir que o plano α passa pela origem O se e somente se $\alpha_0 = 0$, e a reta l passa por O se e somente se $l_0 = l_1 = l_3 = 0$.

A direção de uma reta finita l é o ponto no infinito onde a reta passa do aquém para o além, isto é, o ponto $l \wedge \Omega_2$ que é dado por

$$dir(l) = [0, l_5, -l_4, l_2] \tag{5.6}$$

O *plano bissetor* da reta l, denotado por $bisect(l)$, é o plano perpendicular a l que passa pela origem e está orientado de tal forma que $dir(l)$ fica do seu lado positivo; mais precisamente,

$$bisect(l) = \langle 0, l_5, -l_4, l_2 \rangle \tag{5.7}$$

Utilizando as fórmulas (5.4), podemos demonstrar que duas retas $l = \langle l_0, .. \, l_5 \rangle$ e $m = \langle m_0, .. \, m_5 \rangle$ se interceptam se e somente se

$$l_0 m_5 - l_1 m_4 + l_2 m_3 + l_3 m_2 - l_4 m_1 + l_5 m_0 = 0 \tag{5.8}$$

Neste caso, se as retas não são paralelas — isto é, se l e m se interceptam num ponto finito — então as coordenadas deste ponto de interseção podem ser determinadas pela fórmula

$$\begin{aligned} l \cap m = [\ \kappa_{24}^2 + \kappa_{25}^2 + \kappa_{45}^2, \quad & (l_3 m_2 - l_1 m_4 + l_5 m_0)\kappa_{24} - \kappa_{15}\kappa_{25} - \kappa_{35}\kappa_{45}, \\ & (l_0 m_5 + l_3 m_2 - l_4 m_1)\kappa_{25} + \kappa_{04}\kappa_{24} + \kappa_{34}\kappa_{45}, \\ & (l_0 m_5 - l_1 m_4 + l_2 m_3)\kappa_{45} - \kappa_{02}\kappa_{24} - \kappa_{12}\kappa_{25}\ ] \end{aligned} \tag{5.9}$$

onde

$$\kappa_{ij} = \begin{vmatrix} l_i & l_j \\ m_i & m_j \end{vmatrix}$$

Visto que a interseção entre duas retas nem sempre é definida, não utilizaremos a notação $l \wedge m$ para esta operação.

5.7 Orientações relativas

5.7.1 Posição relativa de dois pontos em relação a uma reta

Dados dois pontos $p = [p_0, .. \, p_3]$ e $q = [q_0, .. \, q_3]$ numa reta $l = \langle l_0, .. \, l_5 \rangle$, dizemos que o par p, q está *positivamente orientado em relação à reta* l se $p \vee q = l$; por outro lado, se $p \vee q = \neg l$, dizemos que o par p, q está *negativamente orientado em relação à reta* l. Em particular, se $p \vee q = \langle \mathbf{0} \rangle$ (isto é, se $p = q$ ou $p = \neg q$), a orientação deste par de pontos em relação a uma reta é indefinida.

Este conceito é formalizado pelo predicado

$$\otimes_l(p, q) = \begin{cases} +1 & \text{se } p \vee q = l \\ 0 & \text{se } p \vee q = [\mathbf{0}] \\ -1 & \text{se } p \vee q = \neg l \end{cases}$$

5.7.2 Posição relativa de dois planos em relação a uma reta

A relação dual à posição relativa de dois pontos numa reta é a relação que descreve a posição relativa de dois planos $\alpha = \langle \alpha_0, .. \alpha_3 \rangle$ e $\beta = \langle \beta_0, .. \beta_3 \rangle$ passando por uma mesma reta $l = \langle l_0, .. l_5 \rangle$. Dizemos que o par α, β está *positivamente orientado em relação à reta* l se $\alpha \wedge \beta = l$; por outro lado, se $\alpha \wedge \beta = \neg l$, dizemos que o par α, β está *negativamente orientado em relação à reta* l. Em particular, se $\alpha \wedge \beta = \langle \mathbf{0} \rangle$ (isto é, se α e β são coincidentes), a orientação deste par de planos em relação a uma reta é indefinida.

Este conceito é formalizado pelo predicado

$$\otimes_l(\alpha, \beta) = \begin{cases} +1 & \text{se } \alpha \wedge \beta = l \\ 0 & \text{se } \alpha \wedge \beta = \langle \mathbf{0} \rangle \\ -1 & \text{se } \alpha \wedge \beta = \neg l \end{cases}$$

5.7.3 Posição relativa de três pontos num plano

Dados três pontos não colineares $p = [p_0, .. p_3]$, $q = [q_0, .. q_3]$ e $r = [r_0, .. r_3]$ sobre um plano $\alpha = \langle \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$, dizemos que o triângulo pqr está *positivamente orientado em relação ao plano* α (denotado por $\Delta(p, q, r, \alpha) = +1$) se o plano $p \vee q \vee r$ coincide com α; caso contrário, se $p \vee q \vee r$ coincide com $\neg\alpha$, dizemos que o triângulo está *negativamente orientado em relação a* α (denotado por $\Delta(p, q, r, \alpha) = -1$). Caso o triângulo seja degenerado (isto é, se p, q e r são colineares), escrevemos $\Delta(p, q, r, \alpha) = 0$.

Como podemos verificar,

$$\Delta(p, q, r, \alpha) = sign \begin{vmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ r_0 & r_1 & r_2 & r_3 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix}$$

5.7.4 Posição relativa de duas retas

Dadas duas retas l e m, sejam p e q dois pontos sobre l e sejam r e s dois pontos sobre m tais que $p \vee q = l$ e $r \vee s = m$. A *orientação relativa* das retas l e m é definida por

$$l \diamond m = sign \begin{vmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ r_0 & r_1 & r_2 & r_3 \\ s_0 & s_1 & s_2 & s_3 \end{vmatrix} \tag{5.10}$$

sendo que, se $l \diamond m = +1$ (resp. $l \diamond m = -1$), dizemos que l e m são positivamente (resp. negativamente) orientadas.

Verifica-se que a fórmula (5.10) não depende da escolha dos pontos p, q, r e s, mas apenas das orientações das retas.

Intuitivamente, $l \diamond m = +1$ se e somente se l "contorna" m (e m "contorna" l) de acordo com a regra da mão direita. Veja figura 5.4.

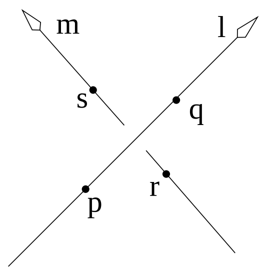


Figura 5.4: Retas positivamente orientadas.

5.8 Ordenação cíclica

Baseados nos predicados $\otimes_l(p,q)$ e $\otimes_l(\alpha,\beta)$ que definem respectivamente a posição de dois pontos em relação a uma reta e a posição de dois planos em relação a uma reta, vamos agora definir dois predicados que definem a ordenação cíclica de três pontos sobre uma reta e de três planos em torno de uma reta.

5.8.1 Ordenação cíclica de três pontos em relação a uma reta

Dados três pontos p, q e r sobre uma mesma reta l, vamos definir o predicado $\otimes_l(p,q,r)$ que retorna $+1$ se, considerando a orientação interna da reta l, estes pontos ocorrem nesta ordem (cíclica) ao longo de l; retorna -1 se eles ocorrem em ordem oposta; e retorna 0 se pelo menos dois desses pontos são iguais. Veja figura 5.5.

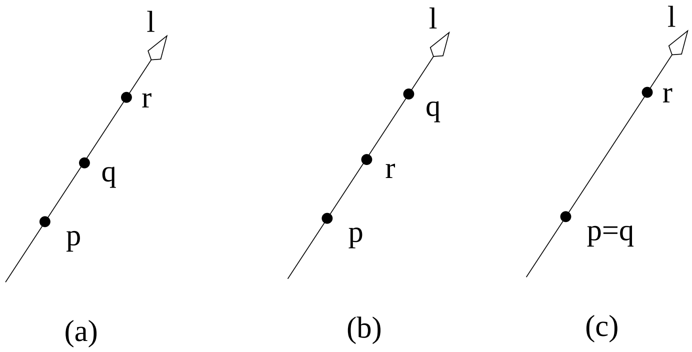


Figura 5.5: Ordem cíclica de três pontos ao longo de uma reta: (a) $\otimes_l(p,q,r) = +1$; (b) $\otimes_l(p,q,r) = -1$; (c) $\otimes_l(p,q,r) = 0$.

Como podemos verificar,

$$\otimes_l(p,q,r) = sign(\otimes_l(p,q) + \otimes_l(q,r) + \otimes_l(r,p))$$

ou seja, $\otimes_l(p,q,r)$ é determinado pela "maioria" dos sinais de $\otimes_l(p,q)$, $\otimes_l(q,r)$ e $\otimes_l(r,p)$.

5.8.2 Ordenação cíclica de três planos em torno de uma reta

A operação dual à ordenação de três pontos ao longo de uma reta é a ordenação cíclica de três planos em torno de uma reta comum a estes três planos. Mais precisamente, dados três planos α, β e γ e uma reta l comum a estes planos, vamos definir o predicado $\otimes_l(\alpha,\beta,\gamma)$ que retorna $+1$ se, considerando a orientação externa da reta l, estes planos ocorrem nesta ordem (cíclica) em torno de l; retorna -1 se eles ocorrem em ordem oposta; e retorna 0 se pelo menos dois desses planos são coincidentes. Veja figura 5.6.

De modo análogo ao predicado anterior, podemos verificar que

$$\otimes_l(\alpha,\beta,\gamma) = sign(\otimes_l(\alpha,\beta) + \otimes_l(\beta,\gamma) + \otimes_l(\gamma,\alpha))$$

5.9 A esfera $\mathbb{S}^2$

Em $\mathbb{T}^3$, a *esfera unitária* $\mathbb{S}^2$ é o conjunto de pontos do aquém à distância 1 da origem O, isto é,

$$\mathbb{S}^2 = \left\{[p_0,p_1,p_2,p_3] \mid p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - p_0^2 = 0 \;\text{ e }\; p_0 > 0\right\}$$

A posição de um ponto $p = [p_0,p_1,p_2,p_3]$ de $\mathbb{T}^3$ em relação a $\mathbb{S}^2$ é definida por

$$p \circ \mathbb{S}^2 = sign(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - p_0^2)$$

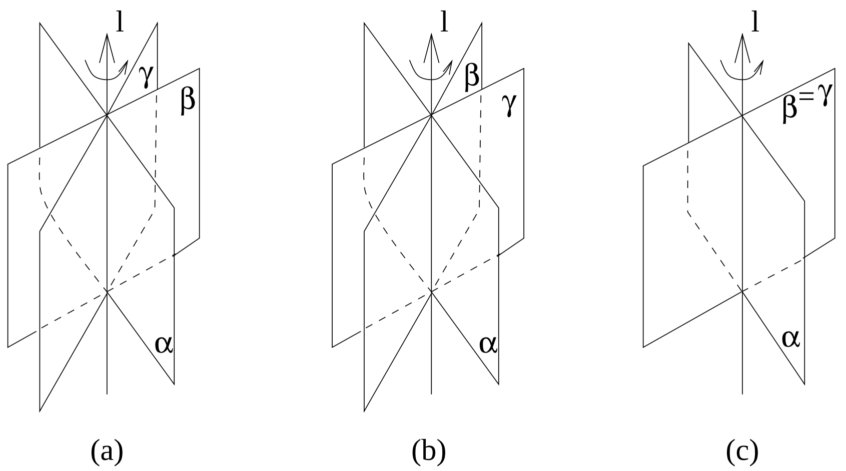


Figura 5.6: Ordem cíclica de três planos em torno de uma reta: (a) $\otimes_l(\alpha, \beta, \gamma) = +1$; (b) $\otimes_l(\alpha, \beta, \gamma) = -1$; (c) $\otimes_l(\alpha, \beta, \gamma) = 0$.

Note que o lado negativo de $\mathbb{S}^2$, isto é, o conjunto de pontos $p \in \mathbb{T}^3$ tais que $p \circ \mathbb{S}^2 = -1$, consiste de duas bolas unitárias separadas: uma no além e outra no aquém. Note também que $p \circ \mathbb{S}^2 = 0$ indica que o ponto p está sobre $\mathbb{S}^2$ ou sobre $\neg\mathbb{S}^2$, *a cópia antípoda* de $\mathbb{S}^2$.

Dados dois pontos p e q em $\mathbb{S}^2$, definimos a *distância entre p e q sobre* $\mathbb{S}^2$, denotada por $Sdist(p, q)$, como sendo o comprimento do menor arco de círculo máximo que passa por estes dois pontos. Mais precisamente, seja d a distância euclidiana entre p e q; então,

$$Sdist(p, q) = 2 \operatorname{arccos} \sqrt{1 - \frac{d^2}{4}}$$

5.10 Polaridade na esfera

Considere duas quádruplas de números a_0, a_1, a_2, a_3 e b_0, b_1, b_2, b_3 tais que $a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$. Pelo exposto nas seções anteriores, note que podemos interpretar esta equação de duas formas distintas: podemos dizer que o ponto com coordenadas $[a_0, a_1, a_2, a_3]$ pertence ao plano com coeficientes $\langle b_0, b_1, b_2, b_3 \rangle$ ou então, que o ponto com coordenadas $[b_0, b_1, b_2, b_3]$ pertence ao plano com coeficientes $\langle a_0, a_1, a_2, a_3 \rangle$. Portanto, a partir desta equação podemos perceber que o papel entre pontos e planos é perfeitamente intercambiável. Na verdade, este conceito denominado *dualidade*, não é uma exclusividade desta equação; ele é um dos conceitos mais importantes da geometria projetiva (convencional ou orientada).

Na geometria projetiva orientada, o princípio de dualidade é baseado num duomorfismo, isto é, uma bijeção entre dois espaços projetivos que troca pontos com planos, preservando suas posições relativas. Em consequência, um duomorfismo também troca as operações $\vee$ e $\wedge$. Portanto, um duomorfismo define para cada conceito e teorema da geometria projetiva orientada, um conceito ou teorema *dual*. Por exemplo, o dual da sentença "o *encontro* de dois planos é uma reta" é "a *junção* de dois pontos é uma reta".

É importante ressaltar que há vários duomorfismos distintos que mapeiam planos em pontos e retas em retas. Cada um deles estabelece um tipo especial de dualidade que tem suas vantagens e desvantagens dependendo do contexto; veja [33, 29, 8]. Para os nossos propósitos, vamos considerar o seguinte mapeamento:

Definição 13 *O* complemento polar *relativo à esfera* $\mathbb{S}^2$*, denotado por* $*$*, é dado por:*

$$
\begin{aligned}
[p_0, p_1, p_2, p_3]^* &= \langle -p_0, p_1, p_2, p_3 \rangle \\
\langle a_0, a_1, a_2, a_3 \rangle^* &= [-a_0, a_1, a_2, a_3] \\
\langle l_0, l_1, l_2, l_3, l_4, l_5 \rangle^* &= \langle -l_5, l_4, l_3, -l_2, -l_1, l_0 \rangle
\end{aligned}
$$

Vamos agora mostrar que $*$ é um duomorfismo de $\mathbb{T}^3$.

Primeiramente, considere o mapa projetivo [33] definido pela matriz

$$
M = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Note que este mapa projetivo leva os pontos do *aquém* de $\mathbb{T}^3$ em pontos do *além* e vice-versa. Além disso, ele mantém fixo os pontos no infinito, isto é, ele mapeia Ω_2 no próprio Ω_2. Este mapa projetivo é denominado *reflexão através* de Ω_2 e é fácil mostrar que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{T}^3 M &= \neg \mathbb{T}^3 \\
\Omega_2 M &= \Omega_2 \\
(a \vee b) M &= (aM) \vee (bM) \\
(a \wedge b) M &= \neg((aM) \wedge (bM))
\end{aligned}
$$

Além disso, dado um ponto $p = [p_0, p_1, p_2, p_3]$, um plano $\alpha = \langle a_0, a_1, a_2, a_3 \rangle$ e uma reta $l = \langle l_0, l_1, l_2, l_3, l_4, l_5 \rangle$ temos que

$$
\begin{aligned}
[p_0, p_1, p_2, p_3]\, M &= [-p_0, p_1, p_2, p_3] \\
\langle a_0, a_1, a_2, a_3 \rangle\, M &= \langle a_0, -a_1, -a_2, -a_3 \rangle \\
\langle l_0, l_1, l_2, l_3, l_4, l_5 \rangle\, M &= \langle l_0, l_1, -l_2, l_3, -l_4, -l_5 \rangle
\end{aligned}
$$

Agora, seja $\vdash$ o *complemento polar à direita* [33, pág. 85] definido por

$$\begin{aligned}
[p_0, p_1, p_2, p_3]^{\vdash} &= \langle p_0, p_1, p_2, p_3\rangle \\
\langle a_0, a_1, a_2, a_3\rangle^{\vdash} &= [-a_0, -a_1, -a_2, -a_3] \\
\langle l_0, l_1, l_2, l_3, l_4, l_5\rangle^{\vdash} &= \langle l_5, -l_4, l_3, l_2, -l_1, l_0\rangle
\end{aligned}$$

Daí, temos que

$$\begin{aligned}
([p_0, p_1, p_2, p_3] \cdot M)^{\vdash} &= [-p_0, p_1, p_2, p_3]^{\vdash} \\
&= \langle -p_0, p_1, p_2, p_3\rangle \\
&= [p_0, p_1, p_2, p_3]^{*}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\langle a_0, a_1, a_2, a_3\rangle \cdot M)^{\vdash} &= \langle a_0, -a_1, -a_2, -a_3\rangle^{\vdash} \\
&= [-a_0, a_1, a_2, a_3] \\
&= \langle a_0, a_1, a_2, a_3\rangle^{*}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\langle l_0, l_1, l_2, l_3, l_4, l_5\rangle \cdot M)^{\vdash} &= \langle l_0, l_1, -l_2, l_3, -l_4, -l_5\rangle^{\vdash} \\
&= [-l_5, l_4, l_3, -l_2, -l_1, l_0] \\
&= \langle l_0, l_1, l_2, l_3, l_4, l_5\rangle^{*}
\end{aligned}$$

o que mostra que $*$ corresponde à composição $M \vdash$.

Visto que $\vdash$ é um duomorfismo, então, usando o teorema 7 de Stolfi [33, pág. 93], podemos concluir que $* = (M \vdash)$ também é um duomorfismo, denominado *polaridade esférica*. Para todo ponto, reta ou plano a, dizemos que a^* é o *polar esférico* de a.

Lema 7 *Sejam a e b dois elementos de $\mathbb{T}^3$. Então*

$$\begin{aligned}
(a \vee b)^* &= a^* \wedge b^* \\
(a \wedge b)^* &= \neg(a^* \vee b^*)
\end{aligned}$$

DEMONSTRAÇÃO: Como M é um mapa projetivo de $\mathbb{T}^3$ em $\neg\mathbb{T}^3$, verifica-se, para todo a e b em $\mathbb{T}^3$, que

$$\begin{aligned}
(a \vee b)M &= (aM) \vee (bM) \\
(a \wedge b)M &= \neg((aM) \wedge (bM))
\end{aligned}$$

Portanto,

$$(a \vee b)^* = (a \vee b)(M \vdash) = ((aM) \vee (bM))^{\vdash} = (aM)^{\vdash} \wedge (bM)^{\vdash} = a^* \wedge b^*$$

e

$$(a \wedge b)^* = (a \wedge b)(M \vdash) = (\neg((aM) \wedge (bM)))^{\vdash} = \neg((aM)^{\vdash} \vee (bM)^{\vdash}) = \neg(a^* \vee b^*)$$

□

Lema 8 *Seja a um elemento de* $\mathbb{T}^3$ *e seja d a sua dimensão. Então*

$$(a^*)^* = \neg^d a$$

Demonstração: Da definição de $\vdash$, segue que $(a^{\vdash})^{\vdash} = \neg^{d+1}\, a$. Por outro lado, pode-se provar que

$$\begin{aligned} aMM &= a \\ aM\vdash &= \neg(a \vdash M) \end{aligned}$$

Desta forma,

$$(a^*)^* \;=\; (aM\vdash)(M\vdash) = \neg(aM\vdash)(\vdash M) = \neg\neg^{d+1}(aMM) = \neg^d a$$

□

Do ponto de vista geométrico, a polaridade definida por $*$ pode ser descrita da seguinte forma: dado um ponto $p = [p_0, p_1, p_2, p_3]$ do lado positivo ("externo") da esfera $\mathbb{S}^2$, seja c o círculo correspondente à interseção entre $\mathbb{S}^2$ e o cone tangente a $\mathbb{S}^2$ com vértice em p. Veja figura 5.7 (a). Como podemos provar, p^* é o plano de suporte do círculo c. Além disso, se uma reta $l = \langle l_0, .. l_5\rangle$ intercepta $\mathbb{S}^2$ então $l^* = \varphi_1 \wedge \varphi_2$, onde φ_1 e φ_2 são os planos tangentes aos pontos de interseção entre a reta l e a esfera $\mathbb{S}^2$. Veja figura 5.7 (b).

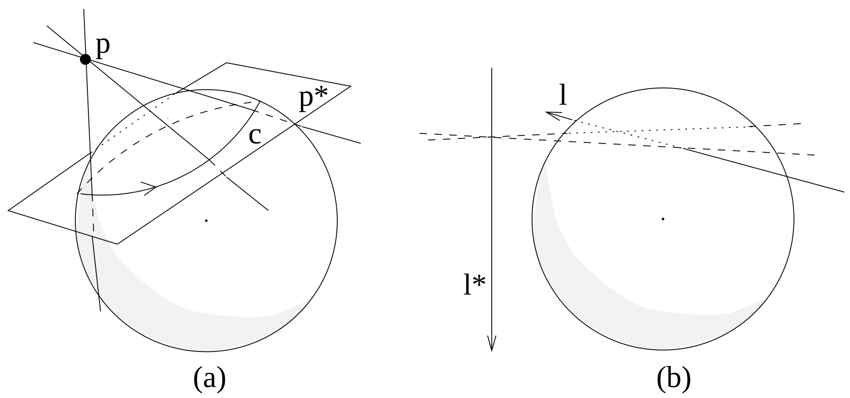


Figura 5.7: Polaridade esférica: (a) Ponto-Plano; (b) Reta-reta.

Para concluir esta seção, vale a pena mencionar que a dualidade é um conceito extremamente útil, pois ela permite reduzir consideravelmente o número de teoremas que precisam ser demonstrados, visto que a prova de um teorema automaticamente estabelece a veracidade do teorema dual. Além disso, pode-se escolher dentre os dois teoremas aquele que é mais simples de se provar.

Por outro lado, a dualidade também é útil do ponto de vista computacional pois ela permite que todo algoritmo geométrico faça o trabalho de dois. Por exemplo, o mesmo algoritmo que computa $a \vee b$ pode ser usado para computar $a \wedge b$, uma vez que $a \wedge b = \neg^{d_a + d_b}(a^* \vee b^*)^*$, onde d_a e d_b são respectivamente as dimensões de a e de b.

Capítulo 6

Geometria na esfera

Neste capítulo vamos descrever um método de representação da geometria dos mapas esféricos, ignorando por enquanto questões de erros de arredondamento. Além disso, vamos estabelecer algumas funções básicas para a manipulação desta geometria.

6.1 Mapas esféricos

Do ponto de vista geométrico, um *mapa esférico* é uma partição da esfera $\mathbb{S}^2$ em três tipos de *elementos*: os *vértices* (pontos), *arestas* (círculos ou arcos de círculos, não necessariamente máximos) e *faces* (regiões abertas). É importante notar que vamos permitir arestas que são um círculo completo, ou seja, neste caso a aresta não possui extremidade.

A representação da geometria dos vértices de um mapa esférico (ignorando questões de erros de arredondamento) não requer nenhuma consideração adicional — uma vez que um vértice é um ponto de $\mathbb{S}^2$, e como tal pode ser representado pelas suas coordenadas homogêneas, isto é, uma quádrupla de números reais $[w, x, y, z]$.

Uma aresta pode ser um círculo completo ou um arco de círculo, sendo que este círculo pode não ser máximo. Portanto, para representarmos uma aresta, é necessário definirmos uma representação para círculos arbitrários sobre $\mathbb{S}^2$.

6.2 Círculos sobre $\mathbb{S}^2$

Definimos um *círculo orientado na esfera*, ou *S-círculo*, como sendo um círculo sobre $\mathbb{S}^2$ com uma orientação interna (um sentido de percurso) especificado.

É fácil ver que todo S-círculo corresponde à interseção entre $\mathbb{S}^2$ e um plano orientado. Mais precisamente, dado um S-círculo c, há um único plano orientado α tal que $c = \alpha \cap \mathbb{S}^2$ e tal que o sentido de percurso de c concorda com a orientação interna do plano α e vice-versa. Dizemos que α é o *plano de suporte* de c e escrevemos $\alpha = spln(c)$. Reciprocamente, dizemos que c é o S-círculo definido por α e escrevemos $c = scrc(\alpha)$. Veja figura 6.1.

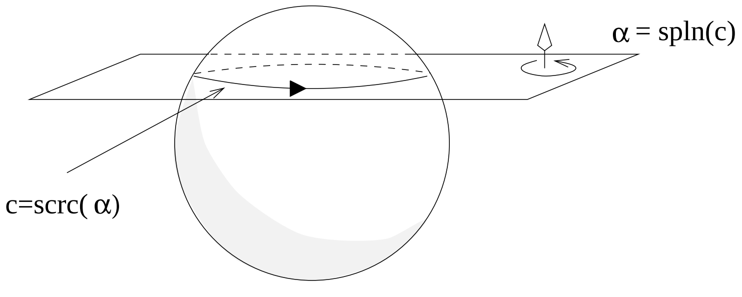


Figura 6.1: Um S-círculo

Desta forma, um S-círculo $c = scrc(\alpha)$ pode ser representado de maneira não ambígüa pelos coeficientes homogêneos $\langle \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$ do plano orientado que o define. Neste caso, vamos indicar o S-círculo definido pelo plano α por $(\!(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\!)$. É importante observar que esta notação só faz sentido quando o plano α define um S-círculo, o que é estabelecido pelo seguinte lema:

Lema 9 *Um plano $\alpha = \langle \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$ define um S-círculo se e somente se*

$$\alpha_0^2 < \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2$$

Demonstração: Por definição, o plano α define um S-círculo se e somente se ele intercepta $\mathbb{S}^2$ em mais de um ponto; e isto ocorre se e somente se a distância entre α e a origem O é menor do que 1.

Pela fórmula (5.5), temos que a distância Euclidiana entre o plano α e a origem O é dada por

$$dist(\alpha, O) = \sqrt{\frac{\alpha_0^2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}}$$

o que implica que $dist(\alpha, O) < 1$ se e somente se

$$\alpha_0^2 < \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2.$$

□

É importante ressaltar que um plano $\langle \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$ tangente a $\mathbb{S}^2$ (isto é, com $\alpha_0^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2$) não define um S-círculo.

Dizemos que dois S-círculos são *coincidentes* se eles incidem sobre um mesmo conjunto de pontos. Como é fácil perceber, os S-círculos $c = (\!(c_0, c_1, c_2, c_3)\!)$ e $c' = (\!(-c_0, -c_1, -c_2, -c_3)\!)$ são coincidentes, mas têm orientações opostas; neste caso, dizemos que eles são *opostos* entre si, o que denotamos por $c' = \neg c$.

6.3 Elementos de um S-círculo

A direção ortogonal ao plano $spln(c)$ que aponta para o lado positivo deste plano no aquém é denominada a *normal* do S-círculo c. Se $c = \langle\!\langle c_0, c_1, c_2, c_3 \rangle\!\rangle$, a direção desta normal é dada pelo vetor (c_1, c_2, c_3) de $\mathbb{R}^3$. Em $\mathbb{T}^3$, é conveniente definir esta direção como sendo o ponto no infinito $snrm(c) = [0, c_1, c_2, c_3]$. O *eixo* de c é a reta $axis(c) = O \vee snrm(c) = \langle 0, 0, c_3, 0, -c_2, c_1 \rangle$. Veja figura 6.2.

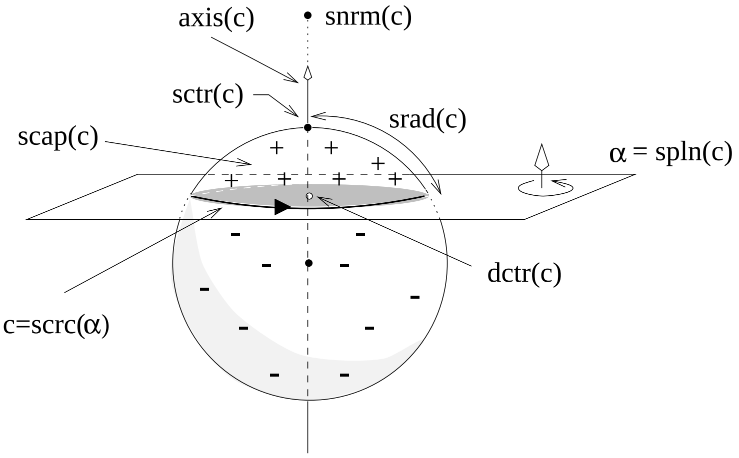


Figura 6.2: Elementos de um S-círculo

Um S-círculo c divide $\mathbb{S}^2$ em duas regiões abertas e não vazias denominadas *calotas*. Por definição, a *calota positiva* de c, denotada por $scap(c)$, é a parte de $\mathbb{S}^2$ localizada do lado positivo do plano $spln(c)$.

Podemos definir dois centros para um S-círculo: o *centro esférico*, ou *S-centro*, é o ponto $sctr(c)$ onde a reta $axis(c)$ cruza a calota positiva de c; o *centro planar*, ou *D-centro*, é o ponto no aquém $dctr(c)$, onde a reta $axis(c)$ cruza o plano $spln(c)$. Mais precisamente, pode-se demonstrar que

$$\begin{aligned} sctr(c) &= \left[\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2},\ c_1,\ c_2,\ c_3\right] \\ dctr(c) &= \neg(axis(c) \wedge spln(c)) = [c_1^2 + c_2^2 + c_3^2, -c_0c_1, -c_0c_2, -c_0c_3] \end{aligned} \tag{6.1}$$

O *raio esférico* ou *S-raio* de c é o comprimento $srad(c)$ do arco de círculo máximo que vai de $sctr(c)$ até um ponto qualquer de c; isto é,

$$srad(c) = \arccos\left(\frac{-c_0}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}}\right) \in (0 \mathrel{{.}\,{.}} \pi). \tag{6.2}$$

Em outras palavras, dado um ponto p qualquer sobre o S-círculo c, $srad(c) = Sdist(p, sctr(c))$.

Seja $p = [p_0, p_1, p_2, p_3]$ um ponto em $\mathbb{S}^2$ e seja θ um número real no intervalo $(0 \mathrel{\_\_} \pi)$. Então, como podemos demonstrar, o S-círculo c cujo S-centro é p e cujo S-raio é θ é dado por

$$c = ((-p_0 \cos\theta, p_1, p_2, p_3)) \tag{6.3}$$

6.4 Arcos de S-círculos

Dois pontos distintos p e q sobre um S-círculo $c = scrc(\alpha)$ dividem este S-círculo em duas partes conexas denominadas *arcos esféricos* ou *S-arcos*. Veja figura 6.3. Por definição, *o S-arco aberto de c que vai de p até q*, denotado por $(p, \overset{\frown}{c}, q)$, é a seqüência (contínua) de pontos obtidos no percurso de p para q ao longo de c no sentido determinado pela orientação de c, excluindo os extremos p e q. Dizemos que p e q são respectivamente a *origem* e o *destino* de A, o que denotamos por $p = A.org$ e $q = A.dst$. Além disso, dizemos que c é o *S-círculo de suporte* de A, o que denotamos por $c = A.scirc$.

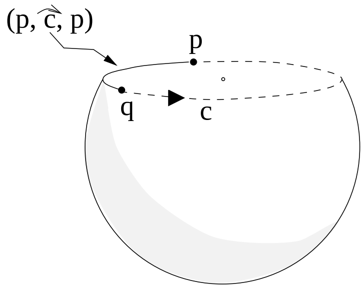


Figura 6.3: O S-arco $(p, \overset{\frown}{c}, q)$.

Como $p \neq q$, o S-arco $(p, \overset{\frown}{c}, q)$ é a parte de c contida no lado positivo do plano $\beta = p \vee q \vee snrm(c)$. Portanto, um ponto r de c está em $(p, \overset{\frown}{c}, q)$ se e somente se $r \diamond \beta = +1$.

Por conveniência, no caso particular em que $p = q$, definimos o S-arco $A = (p, \overset{\frown}{c}, q)$ como sendo todos os pontos de c exceto o ponto $p = q$. Neste caso, $A.org = p = q = A.dst$; um ponto r de c é um ponto de A se e somente se $r \neq p$.

Note que todo S-arco tem uma orientação própria que coincide com a orientação do seu S-círculo de suporte. O S-arco $A = (p, \overset{\frown}{c}, q)$, tomado em sentido inverso, é o S-arco $\neg A = (q, \overset{\frown}{\neg c}, p)$.

Dizemos que uma *S-curva* é um S-círculo ou um S-arco. Vamos representar uma S-curva genérica pela mesma notação $(p, \overset{\frown}{s}, q)$ usada para S-arcos, adotando a convenção que, no caso de um S-círculo, $A.org = \varnothing = A.dst$.

6.5 Operações envolvendo S-círculos

Vamos descrever a seguir algumas operações geométricas importantes para o desenvolvimento dos algoritmos de manipulação de mapas esféricos. Como veremos, estas operações podem ser resolvidas com relativa facilidade usando o fato de que um S-círculo equivale à interseção entre um plano e a esfera $\mathbb{S}^2$.

6.5.1 Posição de um ponto de $\mathbb{S}^2$ em relação a um S-círculo

Para localizar um ponto $p = [p_0, p_1, p_2, p_3] \in \mathbb{S}^2$ em relação a um S-círculo $c = ((c_0, c_1, c_2, c_3))$ vamos definir a operação $p \diamond c$ que retorna $+1$ caso p esteja na calota positiva de c; 0 caso p esteja sobre c; e -1 caso p esteja na calota negativa de c. Note que esta operação, na verdade, consiste em localizar o ponto p em relação ao plano de suporte do S-círculo c, ou seja,

$$p \diamond c = p \diamond spln(c) = sign(p_0c_0 + p_1c_1 + p_2c_2 + p_3c_3)$$

6.5.2 Interseção canônica entre dois S-círculos

A interseção entre dois S-círculos, quando existe, consiste em geral de dois pontos — ou de um único ponto, se os S-círculos são tangentes. Veja figura 6.4. Mais precisamente, a interseção entre dois S-círculos $a = ((a_0, a_1, a_2, a_3))$ e $b = ((b_0, b_1, b_2, b_3))$ é o conjunto dos pontos $p = [w, x, y, z]$ que satisfazem às equações:

$$\begin{cases} a_0w + a_1x + a_2y + a_3z & = & 0 \\ b_0w + b_1x + b_2y + b_3z & = & 0 \\ -w^2 + x^2 + y^2 + z^2 & = & 0 \end{cases}$$

Resolvendo-se este sistema temos

$$\begin{aligned} p_1 &= \Big[\mu,\ -l_1l_2 - l_3l_4 + l_5\sqrt{\delta},\ l_0l_2 - l_3l_5 - l_4\sqrt{\delta},\ l_0l_4 + l_1l_5 + l_2\sqrt{\delta}\ \Big] \\ p_2 &= \Big[\mu,\ -l_1l_2 - l_3l_4 - l_5\sqrt{\delta},\ l_0l_2 - l_3l_5 + l_4\sqrt{\delta},\ l_0l_4 + l_1l_5 - l_2\sqrt{\delta}\ \Big] \end{aligned} \tag{6.4}$$

onde

$$l_0 = a_0b_1 - a_1b_0, \quad l_1 = a_0b_2 - a_2b_0, \quad l_2 = a_0b_3 - a_3b_0$$
$$l_3 = a_1b_2 - a_2b_1, \quad l_4 = a_1b_3 - a_3b_1, \quad l_5 = a_2b_3 - a_3b_2$$

$$\mu = l_2^2 + l_4^2 + l_5^2 \quad \text{e} \quad \delta = \mu - (l_0^2 + l_1^2 + l_3^2)$$

É importante notar que o sinal de δ na equação (6.4) discrimina a maneira como os dois S-círculos se interceptam. Definimos portanto o *discriminante* dos dois S-círculos como sendo a função

$$\between(a,b) = sign(\delta) = sign(l_2^2 + l_4^2 + l_5^2 - l_0^2 - l_1^2 - l_3^2)$$

Verifica-se facilmente que, para quaisquer S-círculos a e b,

$$\between(a,b) = \begin{cases} -1 & \text{se } a \text{ e } b \text{ não se interceptam (em pontos com coordenadas reais)} \\ 0 & \text{se } a \text{ e } b \text{ são coincidentes ou tangentes entre si} \\ 1 & \text{se } a \text{ e } b \text{ se interceptam em dois pontos distintos} \end{cases}$$

Além disso, verifica-se também que, se $\between(a,b) > 0$, então o ponto p_1 da fórmula (6.4) é o ponto onde o S-círculo a alcança o S-círculo b vindo pelo lado positivo de b. Veja a figura 6.4(a).

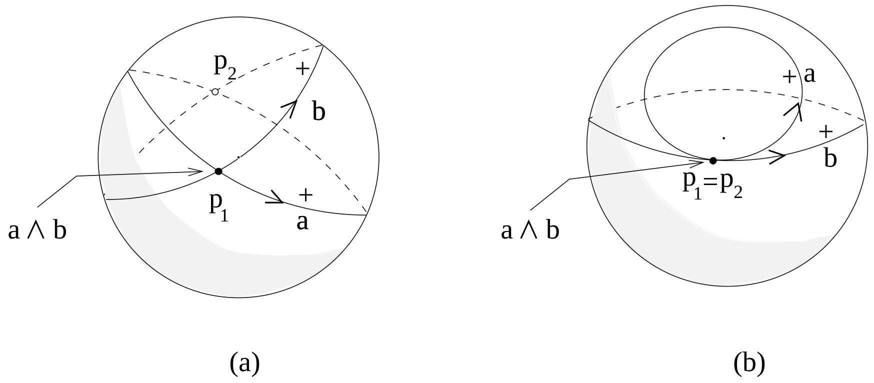


Figura 6.4: Interseção canônica entre dois S-círculos.

Por outro lado, se $\between(a,b) = 0$, então os S-círculos são coincidentes ou são tangentes entre si; neste caso, o S-círculo a (exceto o ponto comum) está todo no lado positivo do S-círculo b se e somente se o centro planar de a está do lado positivo do plano de suporte de b, isto é, $dctr(a) \diamond spln(b) = +1$. Veja a figura 6.4(b).

Isto motiva a seguinte definição:

Definição 14 Sejam a e b dois S-círculos. Se $\between(a,b) > 0$, ou $\between(a,b) = 0$ e $dctr(a) \diamond spln(b) = +1$, então a *interseção canônica* entre a e b, denotada por $a \wedge b$, é o ponto onde o S-círculo a alcança o S-círculo b vindo pelo lado positivo de b. Caso contrário, $a \wedge b = [0,0,0,0] = [\mathbf{0}]$.

Note que se $a \wedge b \neq [\mathbf{0}]$, então este ponto é o ponto p_1 da fórmula (6.4). Note também que, se $\between(a,b) > 0$, então

$$(\neg a) \wedge b = a \wedge (\neg b)$$

é o outro ponto de interseção entre a e b, ou seja, é o ponto p_2 da fórmula (6.4), onde a cruza b passando do lado negativo para o lado positivo de b.

6.5.3 Ponto diametralmente oposto num S-círculo

Uma operação particularmente importante na elaboração dos algoritmos de ordenação cíclica, é a determinação do ponto *diametralmente oposto* a um dado ponto p sobre um S-círculo c que passa por p. Vamos denotar esta operação por $\oslash_c(p)$. Veja a figura 6.5.

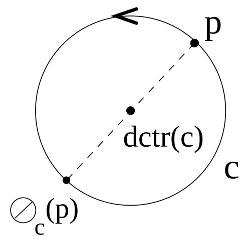


Figura 6.5: Ponto diametralmente oposto a p no S-círculo c.

Como podemos verificar através da figura, $\oslash_c(p)$ é o ponto simétrico a p em relação ao ponto $dctr(c)$. Mais precisamente, se $p = [p_0, p_1, p_2, p_3]$ e $c = (\!(c_0, c_1, c_2, c_3)\!)$, pode-se verificar que

$$\oslash_c(p) = [p_0\kappa, -2c_0c_1p_0 - p_1\kappa, -2c_0c_2p_0 - p_2\kappa, -2c_0c_3p_0 - p_3\kappa]$$

onde $\kappa = c_1^2 + c_2^2 + c_3^3$.

6.5.4 Posição relativa de dois pontos sobre um S-círculo

Definimos a *posição relativa* de dois pontos p e q sobre um S-círculo c, como sendo o predicado $\otimes_c(p, q)$ que, considerando a orientação de c, retorna $+1$ se q ocorre depois de p e antes do ponto $\oslash_c(p)$; retorna -1 se q ocorre após $\oslash_c(p)$ e antes de p e retorna 0 caso $q = p$ ou $q = \oslash_c(p)$. Veja as figuras 6.6.

Em outras palavras, o predicado $\otimes_c(p, q)$ descreve o sentido, em relação à orientação de c, do caminho mais curto que vai de p até q. É fácil perceber que

$$\otimes_c(p, q) = \otimes_{\neg c}(q, p) = - \otimes_c(q, p)$$

Note que este predicado corresponde a determinar se a reta $p \vee q$ é orientada positiva ou negativamente em relação à reta $axis(c) = O \vee snrm(c)$. Portanto, de acordo com a

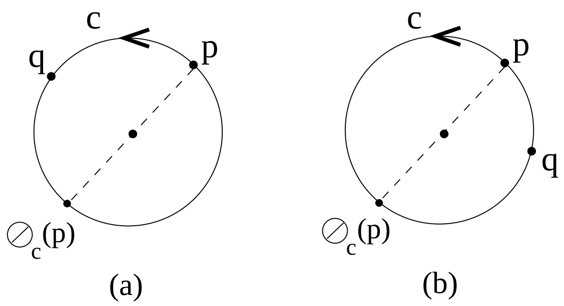


Figura 6.6: Definição de $\otimes_c(p,q)$: (a) $\otimes_c(p,q) = +1$; (b) $\otimes_c(p,q) = -1$.

fórmula (5.10), temos que

$$\otimes_c(p,q) = sign \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix} = sign \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix} \tag{6.5}$$

6.5.5 Ordenação cíclica de três pontos sobre um S-círculo

Definimos a *ordem cíclica* de três pontos $p = [p_0, p_1, p_2, p_3]$, $q = [q_0, q_1, q_2, q_3]$ e $r = [r_0, r_1, r_2, r_3]$ sobre um S-círculo $c = ((c_0, c_1, c_2, c_3))$, como sendo o predicado $\otimes_c(p,q,r)$ que retorna $+1$ se os três pontos p, q e r ocorrem nesta ordem (cíclica) ao longo de c, quando este é percorrido no sentido positivo; retorna -1 se estes pontos ocorrem na ordem oposta; e retorna 0 se quaisquer dois dos pontos são iguais. Veja figura 6.7.

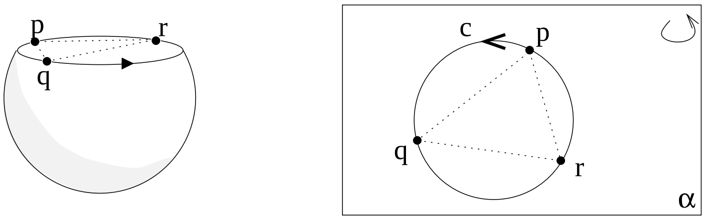
Como podemos notar, esta operação corresponde a determinar a orientação do triângulo determinado pelos 3 pontos em relação ao plano $spln(c)$. Como vimos na seção 5.7.3,

$$\otimes_c(p,q,r) = \Delta(p,q,r,\alpha) = sign \begin{vmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ r_0 & r_1 & r_2 & r_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

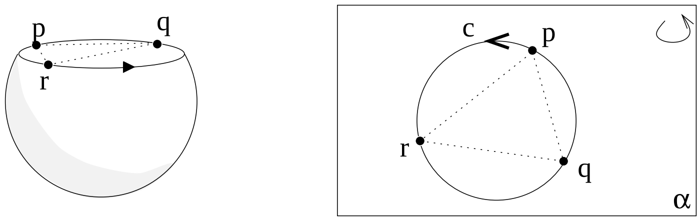
Um resultado particularmente interessante que relaciona os predicados $\otimes$ e $\otimes$ é

Teorema 10 *Para quaisquer três pontos p, q e r sobre um S-círculo c, temos que*

$$\otimes_c(p,q,r) = sign(\otimes_c(p,q) + \otimes_c(q,r) + \otimes_c(r,p))$$



(a)



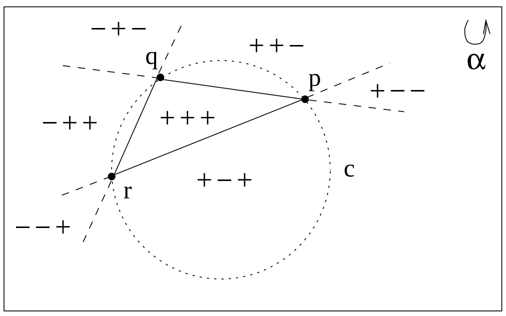
(b)

Figura 6.7: Ordenação cíclica de três pontos sobre um S-círculo: (a) $\otimes_c(p,q,r) = +1$; (b) $\otimes_c(p,q,r) = -1$.

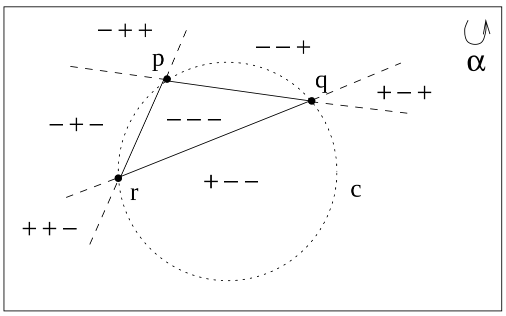
Demonstração: Seja $\alpha = spln(c)$. Como definido por Stolfi [33], a *assinatura* de um ponto u de α em relação ao triângulo pqr e ao plano α é a sequência de sinais $\sigma_0\sigma_1\sigma_2$, onde

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \Delta(u,q,r,\alpha) \\ \sigma_1 &= \Delta(p,u,r,\alpha) \\ \sigma_2 &= \Delta(p,q,u,\alpha) \end{aligned}$$

Ou seja, σ_i é a orientação relativa a α do triângulo pqr, com seu i-ésimo vértice substituido pelo ponto u. Veja figura 6.8. Em particular, se u está dentro do triângulo pqr então



(a)



(b)

Figura 6.8: Assinatura de um ponto relativa ao triângulo pqr e ao plano α.

a assinatura de u é ou '$+++$' ou '$---$', dependendo da orientação do triângulo em relação ao plano α. Mais especificamente, se u está no interior do triângulo então, para todo $i = 0, 1, 2$, $\sigma_i = \Delta(p, q, r, \alpha)$.

Pela figura 6.8, podemos verificar que a assinatura de qualquer ponto u no disco delimitado por c é sempre dominada pela orientação do triângulo pqr em relação a α. Isto é, se u está no interior do círculo c, então

$$\Delta(p, q, r, \alpha) = sign(\sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_1)$$

Em particular, tomando-se $u = dctr(c)$, temos que

$$\sigma_0 = sign \begin{vmatrix} \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2} & c_1 & c_2 & c_3 \\ q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ r_0 & r_1 & r_2 & r_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = sign \begin{vmatrix} \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2} & c_1 & c_2 & c_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ r_0 & r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix} \tag{6.6}$$

Conforme vimos na seção 5.7, esta fórmula define a orientação relativa das retas $dctr(c) \vee [c_0, c_1, c_2, c_3]$ e $q \vee r$.

Como $c_0^2 < c_1^2 + c_2^2 + c_3^2$ (pois c é um S-círculo), então o ponto $c' = [c_0, c_1, c_2, c_3]$ está do lado positivo ("exterior") de $\mathbb{S}^2$. Além disso, temos que $c' \diamond spln(c) = +1 = snrm(c) \diamond spln(c)$, ou seja, os pontos c' e $snrm(c)$ estão do mesmo lado do plano $spln(c)$. Portanto, como $q \vee r$ está no plano α temos que

$$(dctr(c) \vee c') \diamond (q \vee r) = (dctr(c) \vee snrm(c)) \diamond (q \vee r) = (O \vee snrm(c)) \diamond (q \vee r)$$

Isto implica que, no último determinante de (6.6), podemos substituir $dctr(c)$ por O e c' por $snrm(c)$. Daí,

$$\sigma_0 = sign \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ r_0 & r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix}$$

Agora, comparando esta expressão com a fórmula (6.5), podemos concluir que $\sigma_0 = \otimes_c(q, r)$.

Utilizando um raciocínio análogo, podemos concluir que $\sigma_1 = \otimes_c(r, p)$ e $\sigma_2 = \otimes_c(p, q)$.

Logo,

$$\otimes_c(p, q, r) = sign(\otimes_c(p, q) + \otimes_c(q, r) + \otimes_c(r, p))$$

$\square$

6.6 Ordenação cíclica de três S-círculos em torno de um ponto

Outra operação importante para o desenvolvimento de algoritmos de manipulação de mapas esféricos é a determinação da ordem (cíclica) em que três S-círculos saem de um ponto em comum. Para melhor definir esta operação, vamos precisar do seguinte conceito:

Definição 15 Um *S-vetor* é um par (p, c), onde p é um ponto de $\mathbb{S}^2$ e c é um S-círculo passando por p.

Intuitivamente, um S-vetor (p, c) consiste dos pontos do S-círculo c logo adiante de p, no sentido positivo de c, ou seja, é o trecho inicial do S-círculo saindo do ponto p.

Desta forma, dados três S-círculos a, b e c, todos passando pelo ponto p, vamos definir o predicado $\otimes_p(a, b, c)$, como sendo a ordem cíclica dos três S-vetores $s_1 = (p, a)$, $s_2 = (p, b)$ e $s_2 = (p, c)$ em torno do ponto p. Mais precisamente, $\otimes_p(a, b, c)$ é igual a $+1$ se esta ordem (cíclica) coincide com a orientação canônica de $\mathbb{S}^2$; é -1 se esta ordem é oposta; e, é 0 se pelo menos dois dos S-vetores são iguais. Veja figura 6.9.

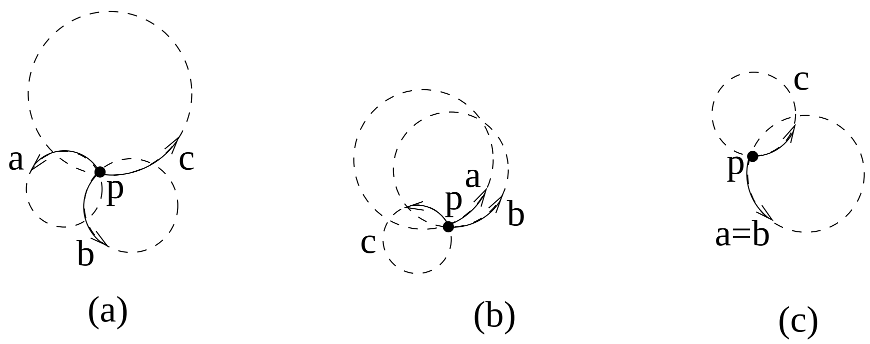


Figura 6.9: Ordem cíclica de três S-círculos em torno de um ponto em comum: (a) $\otimes_p(a, b, c) = +1$; (b) $\otimes_p(a, b, c) = -1$; (c) $\otimes_p(a, b, c) = 0$.

Note que, se os planos de suporte dos três S-círculos têm uma única reta em comum, então o valor de $\otimes_p(a, b, c)$ pode ser facilmente obtido pelo predicado $\otimes_l(spln(a), spln(b), spln(c))$ — visto na seção 5.8.2 — onde, l é a reta comum aos três planos. Por outro lado, se os planos não têm uma única reta em comum, então, neste caso, para obter o valor do predicado $\otimes_p(a, b, c)$ é necessário levar em consideração a orientação e curvatura dos S-círculos. Na seção 9.5, vamos apresentar um algoritmo (exato) para determinar o valor deste predicado.

6.7 P-círculos

Definimos um *P-círculo* como sendo um círculo orientado no plano $\mathbb{R}^2$. Da geometria euclidiana, sabemos que um P-círculo é o conjunto dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que satisfazem à equação

$$a_0(x^2 + y^2) + a_1 x + a_2 y + a_3 = 0 \tag{6.7}$$

Esta equação define um P-círculo se e somente se

$$a_1^2 + a_2^2 - 4a_0a_3 > 0$$

Visto que os números a_0, a_1, a_2 e a_3 — os *coeficiente* do P-círculo — definem univocamente o P-círculo, então, vamos denotar estes coeficientes por $[\![a_0, a_1, a_2, a_3]\!]$.

Por definição, todo P-círculo é orientado. O *lado positivo* de $a = [\![a_0, a_1, a_2, a_3]\!]$ consiste dos pontos (x, y) de $\mathbb{R}^2$ tais que

$$a_0(x^2 + y^2) + a_1 x + a_2 y + a_3 > 0$$

Além disso, o *sentido positivo* de percurso do P-círculo a é o sentido anti-horário, visto de um ponto no seu lado positivo.

Destas definições, é fácil perceber que os coeficientes de um P-círculo são homogêneos, isto é, para todo $\lambda > 0$, os coeficientes $[\![a_0, a_1, a_2, a_3]\!]$ e $[\![\lambda a_0, \lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3]\!]$, definem o mesmo P-círculo.

Novamente, da geometria euclidiana, temos que um círculo em $\mathbb{R}^2$ com centro no ponto (x_c, y_c) e com raio $r > 0$ consiste do conjunto de pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que

$$(x^2 + y^2) - 2x_c x - 2y_c y + (x_c^2 + y_c^2 - r^2) = 0 \tag{6.8}$$

ou seja, os coeficientes deste P-círculo são $[\![1, -2x_c, -2y_c, x_c^2 + y_c^2 - r^2]\!]$. Comparando-se esta equação com a equação (6.7), podemos concluir que, dado um P-círculo $a = [\![a_0, a_1, a_2, a_3]\!]$, o centro de a é o ponto

$$pctr(a) = \left(\frac{-a_1}{2a_0}, \frac{-a_2}{2a_0}\right)$$

e o raio de a é dado por

$$prad(a) = \frac{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 - 4a_0a_3}}{2a_0}$$

Note que quando $a_0 = 0$, o P-círculo $[\![a_0, a_1, a_2, a_3]\!]$ se degenera numa reta, isto é, num círculo com raio infinito. Neste caso, podemos dizer que o centro deste P-círculo é um ponto no infinito na direção $(-a_1, -a_2)$.

6.8 Projeção estereográfica

Para estabelecer a relação entre S-círculos e P-círculos, vamos utilizar o conceito de *projeção estereográfica* que define uma correspondencia biunívoca entre todos os pontos de $\mathbb{S}^2$, exceto um – o *centro de projeção* – e os pontos de um *plano de projeção.* Para os nossos propósitos definimos a *projeção estereográfica canônica*, denotada por ψ, na qual o polo norte $\mathcal{N} = [1, 0, 0, 1]$ é o centro de projeção, e o plano equatorial $\langle 0, 0, 0, 1\rangle$ — identificado com o plano $\mathbb{R}^2$ — é o plano de projeção. Veja figura 6.10.

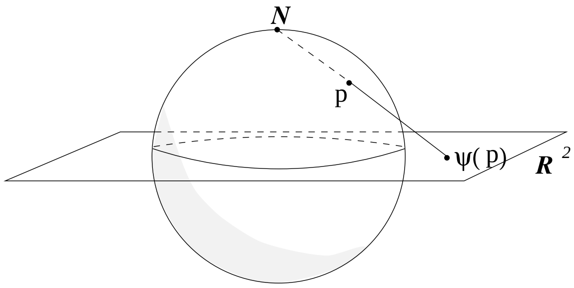


Figura 6.10: Projeção estereográfica canônica.

Mais precisamente, dado um ponto $[w, x, y, z]$ em $(\mathbb{S}^2 \setminus \mathcal{N})$ definimos

$$\psi([w, x, y, z]) = \left(\frac{x}{w - z}, \frac{y}{w - z}\right)$$

Reciprocamente, a *projeção estereográfica (canônica) inversa* que mapeia os pontos (x, y) de $\mathbb{R}^2$ nos pontos de $\mathbb{S}^2 \setminus \mathcal{N}$ é dada por

$$\psi^{-1}(x, y) = \left[x^2 + y^2 + 1, 2x, 2y, x^2 + y^2 - 1\right]$$

É importante notar que a projeção estereográfica ψ estabelece uma bijeção entre S-círculos e P-círculos. Mais precisamente,

Teorema 11 *Para todo S-círculo* $(\!(s_0, s_1, s_2, s_3)\!)$ *e todo P-círculo* $[\![a_0, a_1, a_2, a_3]\!]$*, temos que*

$$\begin{aligned} \psi((\!(s_0, s_1, s_2, s_3)\!) \setminus \mathcal{N}) &= [\![s_0 + s_3, 2s_1, 2s_2, s_0 - s_3]\!] \\ \psi^{-1}([\![a_0, a_1, a_2, a_3]\!]) &= (\!(a_0 + a_3, a_1, a_2, a_0 - a_3)\!) \setminus \mathcal{N} \end{aligned}$$

Note que esta projeção leva S-círculos que não passam pelo polo norte em P-círculos de raio finito e vice-versa; e S-círculos que passam pelo polo norte para retas de $\mathbb{R}^2$, isto é, P-círculos com raio infinito, e vice-versa. Por exemplo, o S-círculo equatorial $(\!(0, 0, 0, 1)\!)$

corresponde ao P-círculo $[\![1,0,0,-1]\!]$, cujo centro é o ponto $(0,0)$ e cujo raio é 1; e o S-círculo $(\!(0,1,0,0)\!)$ corresponde a $[\![0,2,0,0]\!]$ que é o eixo Y de $\mathbb{R}^2$.

É importante notar que podemos definir uma infinidade de projeções estereográficas "não canônicas" escolhendo diferentes centros de projeção e/ou diferentes planos de projeção. Cada uma destas projeções estabelece uma correspondência diferente entre S-círculos e círculos no plano de projeção.

Capítulo 7

Geometria exata na esfera

A implementação convencional da maioria das operações descritas no capítulo 6 utiliza números em ponto flutuante para definir as coordenadas e coeficientes dos pontos, retas e planos. Portanto, esta forma de implementação está sujeita a erros de arredontamento inerentes deste esquema de representação numérica. Como observamos no capítulo 1, quaisquer erros de arredondamento são fatais para algoritmos geométricos. Para evitar estes problemas, nosso objetivo neste capítulo é adequar a representação da geometria dos mapas esféricos, descrita nos capítulos anteriores, de modo que ela possa ser manipulada de maneira exata (isto é, livre de erros de arredondamentos).

De um modo geral, para evitar os erros de arredondamento inerentes às operações em ponto flutuante é necessário nos restringirmos aos números racionais e às operações racionais tais como soma, subtração, multiplicação e divisão. Como veremos a seguir, a utilização de coordenadas homogêneas nos permite reduzir de maneira natural todos os cálculos a operações com números inteiros.

7.1 Pontos racionais

Um ponto de $\mathbb{R}^3$ é dito *racional* se todas as suas coordenadas cartesianas (X, Y, Z) são números racionais. Visto que as coordenadas homogêneas de um ponto $(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3$ são $[\lambda, \lambda X, \lambda Y, \lambda Z]$ para todo $\lambda > 0$, então qualquer ponto racional de coordenadas cartesianas $\left(\frac{p_x}{q_x}, \frac{p_y}{q_y}, \frac{p_z}{q_z}\right)$ pode ser representado pela quádrupla de números inteiros $\left[\lambda, \frac{\lambda}{q_x}p_x, \frac{\lambda}{q_y}p_y, \frac{\lambda}{q_z}p_z\right]$ com $\lambda = mmc(q_x, q_y, q_z)$. Portanto, podemos dizer que um ponto de $\mathbb{R}^3$ é um ponto racional se e somente se ele possui coordenadas homogêneas inteiras.

Analogamente, uma *direção racional* — a direção de um vetor $\left(\frac{p_x}{q_x}, \frac{p_y}{q_y}, \frac{p_z}{q_z}\right)$ com coordenadas racionais — pode ser representada pelo ponto no infinito $\left[0, \frac{\lambda}{q_x}p_x, \frac{\lambda}{q_y}p_y, \frac{\lambda}{q_z}p_z\right]$ com $\lambda = mmc(q_x, q_y, q_z)$.

7.2 Pontos de $\mathbb{S}^2$ representáveis exatamente

Há dois conjuntos de pontos de $\mathbb{S}^2$ que podem ser representados exatamente de modo bastante simples. Um deles, que denotamos por $\mathcal{A}$, é o conjunto de pontos racionais sobre a esfera $\mathbb{S}^2$, isto é,

$$\mathcal{A} = \left\{[a_0, .. \, a_3] \mid a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = a_0^2, \; a_0 > 0 \text{ e } (a_0, .. \, a_3) \in \mathbb{Z}^4\right\}$$

O outro, denotado por $\mathcal{B}$, é o conjunto dos pontos $p = [w, x, y, z]$ de $\mathbb{S}^2$ cujas três últimas coordenadas homogêneas x, y e z são números racionais. Mais precisamente

$$\mathcal{B} = \left\{[b_0, .. \, b_3] \mid b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = b_0^2, \; b_0 > 0 \text{ e } (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{Z}^3\right\}$$

Em outras palavras, $\mathcal{B}$ é o conjunto de pontos de $\mathbb{S}^2$ cujas direções em $\mathbb{R}^3$, relativas à origem, são racionais; equivalentemente, $\mathcal{B}$ consiste das projeções radiais sobre $\mathbb{S}^2$ de todos os pontos racionais de $\mathbb{R}^3$, exceto $(0, 0, 0)$.

Visto que os pontos de $\mathcal{B}$ são pontos em $\mathbb{S}^2$, então a coordenada w pode ser determinada pela fórmula $w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ e portanto pode ser deixada implícita. Ou seja, um ponto p em $\mathcal{B}$ pode ser representado exatamente pela tripla $[x, y, z]$ correspondente à direção do vetor que sai da origem de $\mathbb{S}^2$ e passa pelo ponto p.

Note que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$.

7.2.1 Aproximação de pontos genéricos por pontos de $\mathcal{B}$

Nos resultados a seguir usaremos a notação $\oint x \oint$ para indicar a parte inteira de x, isto é

$$\oint x \oint = \begin{cases} \lfloor x \rfloor & \text{se } x \geq 0 \\ \lceil x \rceil & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Vamos agora mostrar que o conjunto $\mathcal{B}$ é denso sobre $\mathbb{S}^2$, e nesta demonstração, vamos definir um método de aproximação de pontos genéricos de $\mathbb{S}^2$ por pontos de $\mathcal{B}$.

Lema 12 *Para todo ponto $p = (x, y, z)$ em $\mathbb{S}^2$ e todo real $\epsilon > 0$, seja η um real tal que $\eta \geq \sqrt{3} \cdot \max\left\{1, \frac{\pi}{2\epsilon}\right\}$ e sejam $q_1 = \oint \eta x \oint$, $q_2 = \oint \eta y \oint$, $q_3 = \oint \eta z \oint$ e $q_0 = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$. Então, o ponto $q = [q_0, .. \, q_3]$ está em $\mathcal{B}$, e $Sdist(p, q) < \epsilon$.*

Demonstração: Sejam δ_1, δ_2 e δ_3 os três números reais tais que $\oint \eta x \oint = \eta x - \delta_1$, $\oint \eta y \oint = \eta y - \delta_2$ e $\oint \eta z \oint = \eta z - \delta_3$. Portanto, $\vec{v} = \eta \vec{u} - \vec{\delta}$, onde $\vec{v} = (q_1, q_2, q_3)$, $\vec{u} = p = (x, y, z)$ e $\vec{\delta} = (\delta_1, \delta_2, \delta_3)$.

Note que $|\delta_i| < 1$, para todo i; portanto, $\|\vec{\delta}\| < \sqrt{3}$. Logo,

$$\|\vec{v}\| = \|\eta\vec{u} - \vec{\delta}\| \geq \|\eta\vec{u}\| - \|\vec{\delta}\| = \eta - \|\vec{\delta}\| > \sqrt{3} - \sqrt{3} = 0$$

ou seja, $\|\vec{v}\| > 0$, o que implica que pelo menos uma das coordenadas q_1, q_2 ou q_3 é não nula; portanto, $[q_0, q_1, q_2, q_3]$ é um ponto de $\mathcal{B}$.

Seja θ o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Então, $\theta \in [0 \,\_\_\, \pi]$ e $Sdist(p, q) = \theta$. Além disso, seja d a distância euclidiana entre o ponto $\eta\vec{u}$ e a reta Oq — veja a figura 7.1 — daí,

$$\sin\theta = \frac{d}{\|\eta\vec{u}\|} = \frac{d}{\eta} \leq \frac{\|\vec{\delta}\|}{\eta} < \frac{\sqrt{3}}{\eta}$$

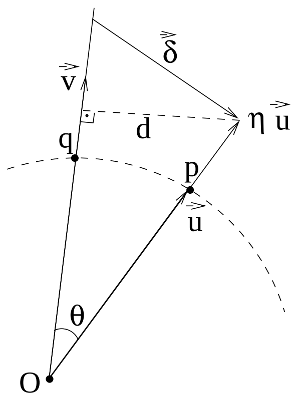


Figura 7.1: Distância d entre o ponto $\eta\vec{u}$ e a reta Oq.

Daí, $\theta < \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{\eta}\right)$. Visto que $\eta \geq \frac{\pi\sqrt{3}}{2\epsilon}$ e visto que, para todo $\gamma \in [0 \,\_\_\, 1]$, $\arcsin(\gamma) \leq \frac{\pi}{2}\gamma$, então

$$Sdist(p, q) = \theta < \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{\eta}\right) < \frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{3}}{\eta} \leq \frac{\pi}{2}\sqrt{3}\frac{2\epsilon}{\pi\sqrt{3}} = \epsilon$$

□

O lema 12 dá origem a um algoritmo bastante simples para aproximar um ponto genérico da esfera $\mathbb{S}^2$ por um ponto de $\mathcal{B}$. Vamos denominar este algoritmo de BAprox.

Corolário 13 *Para todo ponto p de $\mathbb{S}^2$ e todo real ϵ com $0 < \epsilon < \pi/2$, existe um ponto $q = [q_0, .. q_3]$ em $\mathcal{B}$ tal que $Sdist(p, q) < \epsilon$, e cujas coordenadas inteiras q_1, q_2 e q_3 têm no máximo $\left\lfloor \log_2 \frac{1}{\epsilon} \right\rfloor + 3$ bits.*

Corolário 14 *O conjunto $\mathcal{B}$ é denso sobre $\mathbb{S}^2$.*

7.2.2 Aproximação de pontos genéricos por pontos de $\mathcal{A}$

Considerando a fórmula da projeção estereográfica canônica ψ (seção 6.8), podemos verificar facilmente os seguintes resultados:

Lema 15 *A projeção estereográfica canônica ψ é uma bijeção contínua entre os pontos de $\mathcal{A} \setminus \mathcal{N}$ e os pontos racionais $\mathbb{Q}^2$ de $\mathbb{T}^2$.*

Uma vez que os pontos racionais são um subconjunto denso de $\mathbb{R}^2$, o lema 15 nos permite concluir que

Corolário 16 *O conjunto $\mathcal{A}$ é denso sobre $\mathbb{S}^2$.*

Este resultado sugere um algoritmo, denominado AAprox, para aproximar um ponto genérico $p = [p_0, p_1, p_2, p_3]$ de $\mathbb{S}^2$ por um ponto de $\mathcal{A}$ com uma precisão arbitrária $\epsilon > 0$ dada.

Sem perda de generalidade, podemos supor que p está no hemisfério sul da esfera $\mathbb{S}^2$, pois caso contrário, basta determinar uma aproximação $q = [q_0, q_1, q_2, q_3]$ para o ponto $\overline{p} = [p_0, -p_1, -p_2, -p_3]$ e tomar o ponto $\overline{q} = [q_0, -q_1, -q_2, -q_3]$. Pode-se verificar que, para quaisquer dois pontos p e q no hemisfério sul da esfera $\mathbb{S}^2$

$$Sdist(p, q) \leq 2\, dist(\psi(p) - \psi(q)) \tag{7.1}$$

Portanto, o algoritmo AAprox consiste em: (1) calcular inicialmente o ponto $p' = \psi(p)$ de $\mathbb{R}^2$ com erro $\delta < \frac{\epsilon}{2}$; (2) aproximar o ponto p' por um ponto racional q' de $\mathbb{R}^2$ com erro $\eta \leq \frac{\epsilon}{2} - \delta$; e (3) computar $q = \psi^{-1}(q')$, com aritmética exata.

Pelo lema 15, temos que q é um ponto de $\mathcal{A}$; portanto, pela fórmula (7.1), podemos concluir que $Sdist(p, q) \leq \epsilon$.

Visto que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, o corolário 16 implica que $\mathcal{B}$ é um subconjunto denso de $\mathbb{S}^2$ (corolário 14). No entanto, a aproximação por pontos de $\mathcal{A}$ fornecida pelo algoritmo AAprox requer o dobro de bits que a aproximação por pontos de $\mathcal{B}$ fornecida pelo algoritmo BAprox (lema 12).

Corolário 17 *Para todo ponto p de $\mathbb{S}^2$ e todo real $\epsilon > 0$, existe um ponto $q = [q_0, .. q_3]$ em $\mathcal{A}$ tal que $Sdist(p, q) < \epsilon$, e cujas coordenadas inteiras q_0, q_1, q_2 e q_3 têm no máximo $2\left\lfloor \log_2 \frac{1}{\epsilon} \right\rfloor + 2$ bits.*

Demonstração: É fácil ver que para todo ponto p do plano $\mathbb{R}^2$ e todo $\epsilon > 0$ existe um ponto racional $q' = \left(\frac{x}{w}, \frac{y}{w}\right)$ tal que $dist(p, q') \leq \epsilon$ e x, y, e w são inteiros com $\left\lfloor \log_2 \frac{1}{\epsilon} \right\rfloor + 1$ bits. Visto que ψ^{-1} é uma função quadrática, podemos concluir que as coordenadas inteiras do ponto $q = \psi^{-1}(q')$, eliminando os fatores comuns, têm $2\left\lfloor \log_2 \frac{1}{\epsilon} \right\rfloor + 2$ bits. $\square$

7.3 Planos e S-círculos racionais

Dizemos que um plano $\alpha = \langle \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$ é *racional* se todos os coeficientes α_i são números racionais. Por sua vez, um S-círculo é dito *racional* se o seu plano de suporte é um plano racional.

Visto que um plano α pode ser representado por qualquer quádrupla $\langle \lambda\alpha_0, \lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \lambda\alpha_3 \rangle$ com $\lambda > 0$, então todo plano racional pode ser representado por um quádrupla de coeficientes inteiros. Portanto, podemos dizer que um plano é racional se ele possui coeficientes homogêneos inteiros. O mesmo se aplica, obviamente, aos S-círculos racionais.

7.3.1 Construção de um S-círculo racional com centro em $\mathcal{B}$

Vamos agora mostrar que dado um ponto $p = [p_0, .. p_3]$ em $\mathcal{B}$ e um raio $\theta \in (0 \mathrel{..} \pi)$, podemos sempre obter um S-círculo racional com S-centro no ponto dado e cujo S-raio é suficientemente próximo de θ. Isto é,

Lema 18 *Para todo ponto $p = [p_0, .. p_3]$ de $\mathcal{B}$ com coordenadas p_1, p_2 e p_3 inteiras, todo $\theta \in (0 \mathrel{..} \pi)$ e todo $\epsilon > 0$, seja $\sigma = \left\lceil \frac{18}{\epsilon^2 p_0} \right\rceil$. Então, $b = (\!(-\lfloor\!\rceil \sigma p_0 \cos\theta \lfloor\!\rceil, \sigma p_1, \sigma p_2, \sigma p_3)\!)$ é um Scirculo racional tal que $sctr(b) = p$ e $|srad(b) - \theta| < \epsilon$.*

Demonstração: Sem perda de generalidade podemos supor que $\theta \leq \frac{\pi}{2}$, pois caso contrário basta provar o lema para o ponto $\overline{p} = [p_0, -p_1, -p_2, -p_3]$ e raio $\overline{\theta} = \pi - \theta$, obtendo assim um S-círculo racional $a = (\!(a_0, .. a_3)\!)$ tal que $sctr(a) = \overline{p}$ e $\left|srad(a) - \overline{\theta}\right| < \epsilon$; daí, basta observar que $sctr(\neg a) = p$ e $|srad(\neg a) - \theta| = \left|srad(a) - \overline{\theta}\right|$.

Note que σ é inteiro e $\sigma \geq 1$. Visto que $p \in \mathcal{B}$, então $p_0 = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}$; como p_1, p_2 e p_3 são inteiros e não todos nulos, então $p_0 \geq 1$. Obviamente, os coeficientes de b são inteiros. Além disso, com a suposição de que $\theta \leq \frac{\pi}{2}$, temos que $\sigma p_0 \cos\theta \geq 0$. Portanto, $b_0 = -\lfloor\!\rceil \sigma p_0 \cos\theta \lfloor\!\rceil = -\lfloor \sigma p_0 \cos\theta \rfloor$; daí

$$b_0^2 = \lfloor \sigma p_0 \cos\theta \rfloor^2 \leq \sigma^2 p_0^2 \cos^2\theta \leq \sigma^2 p_0^2 = \sigma^2 (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)$$

o que significa que b é um S-círculo, obviamente racional, com $sctr(b) = p$.
Agora, seja $\varphi = srad(b)$; então

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\lfloor\!\rceil \sigma p_0 \cos\theta \lfloor\!\rceil}{\sigma p_0}\right) = \arccos\left(\frac{\lfloor \sigma p_0 \cos\theta \rfloor}{\sigma p_0}\right)$$

Visto que $\lfloor \sigma p_0 \cos\theta \rfloor > \sigma p_0 \cos\theta - 1$, então

$$\cos\varphi = \frac{\lfloor \sigma p_0 \cos\theta \rfloor}{\sigma p_0} > \frac{(\sigma p_0 \cos\theta - 1)}{\sigma p_0} = \cos\theta - \frac{1}{\sigma p_0}$$

Por outro lado, visto que $\lfloor \sigma p_0 \cos\theta \rfloor \leq \sigma p_0 \cos\theta$, então

$$\cos\varphi = \frac{\lfloor \sigma p_0 \cos\theta \rfloor}{\sigma p_0} \leq \frac{\sigma p_0 \cos\theta}{\sigma p_0} = \cos\theta$$

Logo,

$$0 \leq \cos\theta - \cos\varphi < \frac{1}{\sigma p_0}$$

Visto que $\sigma \geq 1$ e $p_0 \geq 1$, então $\frac{1}{\sigma p_0} \leq 1$, o que implica que

$$(\cos\theta - \cos\varphi)^2 < \left(\frac{1}{\sigma p_0}\right)^2 \leq \frac{1}{\sigma p_0} \tag{7.2}$$

Como φ é um S-raio, então tanto θ como φ pertencem ao intervalo $(0 \,\_\_\, \pi)$, e portanto $\sin\theta \geq 0$ e $\sin\varphi \geq 0$. Daí,

$$\begin{array}{rcl} (\sin\theta - \sin\varphi)^2 & = & |\sin\theta - \sin\varphi|\,|\sin\theta - \sin\varphi| \leq |\sin\theta + \sin\varphi|\,|\sin\theta - \sin\varphi| \\ & = & \left|\sin^2\theta - \sin^2\varphi\right| = |1 - \cos^2\theta - (1 - \cos^2\varphi)| \\ & = & |\cos^2\varphi - \cos^2\theta| = |\cos\varphi + \cos\theta|\,|\cos\varphi - \cos\theta| \\ & = & \leq 2\,|\cos\varphi - \cos\theta| < 2\frac{1}{\sigma p_0} \end{array} \tag{7.3}$$

De (7.2) e (7.3) temos que

$$\begin{array}{rcccl} \cos^2\theta + \cos^2\varphi - 2\cos\theta\cos\varphi & = & (\cos\theta - \cos\varphi)^2 & < & \frac{1}{\sigma p_0} \\ \sin^2\theta + \sin^2\varphi - 2\sin\theta\sin\varphi & = & (\sin\theta - \sin\varphi)^2 & < & \frac{2}{\sigma p_0} \end{array}$$

Somando estas duas desigualdades obtemos

$$2 - 2(\cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi) < \frac{3}{\sigma p_0}$$

o que implica que

$$\cos(\theta - \varphi) > 1 - \frac{3}{2\sigma p_0}$$

Agora, usando a expansão de Taylor da função $\cos(x)$, temos que

$$\cos(\theta - \varphi) \leq 1 - \frac{(\theta - \varphi)^2}{2} + \frac{(\theta - \varphi)^4}{24}$$

Portanto

$$\frac{(\theta - \varphi)^2}{2} - \frac{(\theta - \varphi)^4}{24} < \frac{3}{2\sigma p_0}$$

Por outro lado, podemos mostrar que para todo x no intervalo $[-\sqrt{10} \,\_\_\, \sqrt{10}\,]$

$$\frac{x^2}{12} \leq \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}$$

Novamente, visto que θ e φ pertencem ao intervalo $(0 \,\_\_\, \pi)$, então $(\theta - \varphi) \in (-\pi \,\_\_\, \pi) \subset [-\sqrt{10} \,\_\_\, \sqrt{10}\,]$. Portanto,

$$\frac{(\theta-\varphi)^2}{12} \le \frac{(\theta-\varphi)^2}{2} - \frac{(\theta-\varphi)^4}{24} < \frac{3}{2\sigma p_0}$$

Logo,

$$|srad(a) - srad(b)| = |\theta - \varphi| < \sqrt{\frac{18}{\sigma p_0}} \le \epsilon$$

□

A partir do lema 18, podemos concluir que o número de bits necessário para construir o S-círculo desejado é proporcional à precisão utilizada. Ou seja,

Corolário 19 *Para todo ponto* $p = [p_0, .. \, p_3]$ *de* $\mathcal{B}$ *com coordenadas* p_1, p_2 *e* p_3 *inteiras de* m *bits, todo* $\theta \in (0 \,\_\_\, \pi)$ *e todo* $\epsilon > 0$, *existe um S-círculo racional* b *tal que* $sctr(b) = p$, $|srad(b) - \theta| < \epsilon$ *e cujos coeficientes são inteiros com* $\max\{m, 2\left\lfloor \log \frac{1}{\epsilon} \right\rfloor\} + 6$ *bits.*

Além disso, o mesmo lema 18 nos permite concluir que todo S-círculo com S-centro num ponto de $\mathcal{B}$ pode ser adequadamente aproximado por um S-círculo racional; mais precisamente,

Corolário 20 *Para todo S-círculo* $a = (\!(a_0, a_1, a_2, a_3)\!)$ *tal que* a_1, a_2 *e* a_3 *são inteiros e todo real* $\epsilon > 0$, *sejam* $\kappa = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ *e* $\sigma = \left\lceil \frac{18}{\epsilon^2 \kappa} \right\rceil$ *e seja* $b = (\!(\oint \sigma a_0 \oint, \sigma a_1, \sigma a_2, \sigma a_3)\!)$. *Então* b *é um S-círculo racional tal que* $|srad(a) - srad(b)| < \epsilon$.

7.4 Aproximação racional de S-círculos genéricos

Vamos agora mostrar que um S-círculo genérico (com S-centro e S-raio quaisquer) pode ser aproximado por um S-círculo racional com uma precisão arbitrária.

Para comparar os S-círculos usaremos o seguinte conceito:

Definição 16 Para quaisquer dois conjuntos A e B de $\mathbb{R}^n$, a *distância de Hausdorff* entre A e B, denotada por $Hdist(A, B)$, é dada por

$$Hdist(A, B) = \max\left\{ \sup_{x\in A}\{\inf_{y \in B} dist(x,y)\},\ \sup_{y\in B}\{\inf_{x\in A} dist(x,y)\}\right\}$$

Mostra-se [19] que $Hdist$ é uma distância sobre o conjunto dos subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$.

Para obter a aproximação dos S-círculos genéricos, utilizaremos o seguinte lema:

Lema 21 *Dados dois S-círculos a e b, a distância de Hausdorff entre estes dois S-círculos é tal que*

$$Hdist(a,b) \leq Sdist(sctr(a), sctr(b)) + |srad(a) - srad(b)|$$

DEMONSTRAÇÃO: Seja c um S-círculo com o mesmo S-centro que b e com o mesmo S-raio que a. Pela desigualdade triangular temos que

$$Hdist(a,b) \leq Hdist(a,c) + Hdist(c,b)$$

Visto que a e c têm o mesmo S-raio, é fácil verificar que $Hdist(a,c) \leq Sdist(sctr(a), sctr(c))$. Analogamente, visto que b e c têm o mesmo S-centro, temos que $Hdist(c,b) = |srad(c) - srad(b)| = |srad(a) - srad(b)|$. Logo,

$$Hdist(a,b) \leq Sdist(sctr(a), sctr(b)) + |srad(a) - srad(b)|$$

□

O lema 21 nos permite combinar os lemas 12 e 18 para obter o seguinte resultado:

Corolário 22 *Para todo $p = (x,y,z)$ de $\mathbb{S}^2$, todo real $\theta \in (0 \mathinner{..} \pi)$ e todo real $\epsilon > 0$, seja a o S-círculo tal que $sctr(a) = p$ e $srad(a) = \theta$, e sejam $\eta \geq \sqrt{3} \cdot \max\{1, \frac{\pi}{\epsilon}\}$, $\kappa = \sqrt{\oint \eta x \oint^2 + \oint \eta y \oint^2 + \oint \eta z \oint^2}$ e $\sigma = \left\lceil \frac{72}{\epsilon^2 \kappa} \right\rceil$. Então,*

$$b = ((-\oint \sigma\kappa \cos\theta \oint, \sigma\oint \eta x \oint, \sigma\oint \eta y \oint, \sigma\oint \eta z \oint))$$

é um S-círculo racional tal que $Hdist(a,b) < \epsilon$.

DEMONSTRAÇÃO: Dados $\eta \geq \sqrt{3} \cdot \max\{1, \frac{\pi}{\epsilon}\}$ e $\kappa = \sqrt{\oint \eta x \oint^2 + \oint \eta y \oint^2 + \oint \eta z \oint^2}$, pelo lema 12, temos que $q = [\kappa, \oint \eta x \oint, \oint \eta y \oint, \oint \eta z \oint]$ é um ponto de $\mathcal{B}$ tal que $Sdist(p,q) = Sdist(sctr(a), q) \leq \frac{\epsilon}{2}$. Agora, pelo lema 18, dado $\sigma = \left\lceil \frac{72}{\epsilon^2 \kappa} \right\rceil$, temos que $b = ((-\oint \sigma\kappa \cos\theta \oint, \sigma\oint \eta x \oint, \sigma\oint \eta y \oint, \sigma\oint \eta z \oint))$ é um S-círculo racional tal que $sctr(b) = q$ e $|srad(b) - \theta| < \frac{\epsilon}{2}$.

Portanto, pelo lema 21,

$$Hdist(a,b) \leq Sdist(sctr(a), sctr(b)) + |srad(a) - srad(b)| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

□

A partir deste resultado podemos concluir que

Corolário 23 *Para todo S-círculo a e todo real $\epsilon > 0$, existe um S-círculo racional $b = ((b_0, .. b_3))$ tal que $Hdist(a,b) \leq \epsilon$ e cujos coeficientes são inteiros com no máximo $2 \left\lfloor \log_2 \frac{1}{\epsilon} \right\rfloor + 9$ bits.*

Note que, assim como nos casos anteriores, o número de bits necessário para aproximar um S-círculo genérico por um S-círculo racional é proporcional à precisão desejada.

Finalmente, temos que

Corolário 24 *O conjunto dos S-círculos racionais é denso no conjunto de todos os S-círculos.*

7.5 P-círculos racionais

Um P-círculo — isto é, um círculo no plano $\mathbb{R}^2$ — $a = [\![a_0, a_1, a_2, a_3]\!]$ é dito *racional* se os seus coeficientes $a_0, \cdots, a_3$ são racionais; equivalentemente, inteiros. Há uma estreita correspondência entre os círculos racionais de $\mathbb{R}^2$ e de $\mathbb{S}^2$:

Lema 25 *A projeção estereográfica canônica ψ é uma bijeção entre os S-círculos racionais e os P-círculos racionais.*

Capítulo 8

Interseção exata de S-círculos

Como o leitor deve se lembrar, o nosso objetivo é elaborar uma representação da geometria dos mapas esféricos que além de ser exata também seja fechada para a operação de sobreposição.

A representação descrita no capítulo anterior nos permite aproximar adequadamente os elementos (vértices e arestas) de um mapa esférico por elementos cuja geometria pode ser representada exatamente. Mas, para que a operação de sobreposição possa ser realizada de maneira exata é fundamental que o ponto de interseção $a \wedge b$ entre dois S-círculos racionais a e b também possa ser representado exatamente.

Infelizmente, como podemos verificar através do exemplo a seguir, mesmo que a e b sejam S-círculos racionais, o ponto $a \wedge b$ pode não estar contido nos conjuntos $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ que definimos no capítulo anterior: por exemplo, se $a = ((1, 2, 2, 2))$ e $b = ((1, 2, -2, 2))$, então

$$a \wedge b = \left[4, -1 + \sqrt{7}, 0, -1 - \sqrt{7}\,\right]$$

que não é um ponto do conjunto $\mathcal{B}$, pois $(-1 + \sqrt{7})/(-1 - \sqrt{7})$ não é um número racional. Para contornar este problema, vamos estender a representação exata de pontos de $\mathbb{S}^2$, definindo um conjunto (maior) de pontos de $\mathbb{S}^2$ com representação exata que inclua também os pontos de interseção entre dois S-círculos racionais.

8.1 Interseção entre S-círculos pela reta em comum aos planos de suporte

Sejam a e b dois S-círculos e sejam α e β os seus respectivos planos de suporte, isto é, $\alpha = spln(a)$ e $\beta = spln(b)$. Além disso, seja l a reta de interseção entre estes planos, isto é, $l = \alpha \wedge \beta$. É fácil perceber que os pontos de interseção entre os S-círculos a e b corresponde aos pontos de interseção entre a reta l e a esfera $\mathbb{S}^2$. Veja figura 8.1.

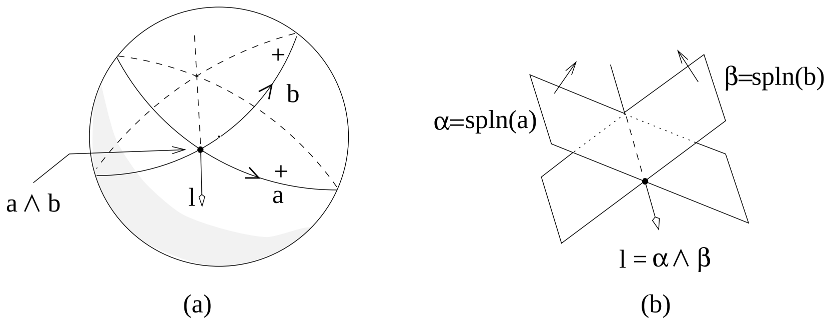


Figura 8.1: Interseção entre dois S-círculos e entre os seus planos de suporte.

Portanto, os pontos de interseção entre dois S-círculos podem ser identificados pela reta de interseção entre seus planos de suporte, sendo que a orientação desta reta nos permite distinguir de maneira não ambígua o ponto de interseção canônica $a \wedge b$ do outro ponto de interseção $a \wedge (\neg b)$ — caso eles sejam distintos.

Vamos denotar por $ent(l)$ o ponto do aquém onde a reta l "entra" em $\mathbb{S}^2$, isto é, deixa o lado positivo ("exterior") de $\mathbb{S}^2$; e por $ext(l)$, o ponto do aquém onde a reta l "sai" de $\mathbb{S}^2$, isto é, entra no lado positivo de $\mathbb{S}^2$. Além disso, é conveniente denotar por $mid(l)$ o ponto médio entre estes dois pontos, isto é, $mid(l) = l \wedge bisect(l)$, o que corresponde ao ponto de l mais próximo da origem O. Veja a figura 8.2.

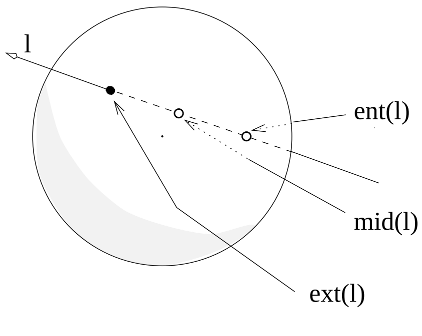


Figura 8.2: Os pontos $ent(l)$, $mid(l)$ e $ext(l)$.

Como podemos verificar, para toda reta $l = \langle l_0, .. \, l_5 \rangle$ que intercepta $\mathbb{S}^2$

$$\begin{array}{rcllll} ent(l) & = & [\ \mu, & -l_1 l_2 - l_3 l_4 - l_5\sqrt{\delta}, & l_0 l_2 - l_3 l_5 + l_4\sqrt{\delta}, & l_0 l_4 + l_1 l_5 - l_2\sqrt{\delta}\ ] \\ mid(l) & = & [\ \mu, & -l_1 l_2 - l_3 l_4, & l_0 l_2 - l_3 l_5, & l_0 l_4 + l_1 l_5\ ] \\ ext(l) & = & [\ \mu, & -l_1 l_2 - l_3 l_4 + l_5\sqrt{\delta}, & l_0 l_2 - l_3 l_5 - l_4\sqrt{\delta}, & l_0 l_4 + l_1 l_5 + l_2\sqrt{\delta}\ ] \end{array} \tag{8.1}$$

onde $\mu = l_2^2 + l_4^2 + l_5^2$ e $\delta = \mu - (l_0^2 + l_1^2 + l_3^2)$.

Pela fórmula (5.5), uma reta l é tangente à $\mathbb{S}^2$ se e somente se $l_2^2 + l_4^2 + l_5^2 \;=\; l_0^2 + l_1^2 + l_3^2$. Note pela fórmula (8.1), que isto implica que $ent(l) = mid(l) = ext(l)$ — o que está de acordo com a definição destes pontos.

Portanto, considerando a definição de interseção canônica entre dois S-círculos (seção 6.5.2), podemos concluir que

Teorema 26 *Sejam a e b dois S-círculos, seja $l = spln(a) \wedge spln(b)$ e seja $\delta = (l_2^2 + l_4^2 + l_5^2) - (l_0^2 + l_1^2 + l_3^2)$. Então,*

$$a \wedge b = ext(l)$$

se e somente se $\delta > 0$, ou $\delta = 0$ e $dctr(a) \diamond spln(b) = +1$. Caso contrário, $a \wedge b = [\mathbf{0}]$.

8.2 Pontos sub-racionais de $\mathbb{S}^2$

De acordo com as equações (5.4), a interseção entre dois planos racionais é uma reta com coeficientes de Plücker racionais; isto é, uma *reta racional*. Por outro lado, pelo teorema 26, a interseção canônica entre dois S-círculos pode ser representada pelos coeficientes de Plücker da reta $spln(a) \wedge spln(b)$. Portanto, a interseção canônica entre dois S-círculos racionais pertence ao conjunto

$$\mathcal{C} = \{\, ext(l) \mid l \text{ é uma reta racional} \,\}$$

que é denominado o conjunto dos pontos *sub-racionais* de $\mathbb{S}^2$.

Assim, todo ponto $p \in \mathcal{C}$ pode ser representado exatamente pelos seis coeficientes racionais — equivalentemente inteiros — de alguma reta racional l tal que $ext(l) = p$. Neste caso, se $l = \langle l_0, l_1, l_2, l_3, l_4, l_5 \rangle$, vamos denotar

$$ext(l) = \langle\!\langle l_0, l_1, l_2, l_3, l_4, l_5 \rangle\!\rangle$$

É fácil ver que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{C}$. O relacionamento entre os conjuntos $\mathcal{A}$ e $\mathcal{C}$ é estabelecido mais precisamente pelos seguintes teoremas:

Teorema 27 *Sejam $\langle l_0, .. \, l_5 \rangle$ os coeficientes inteiros de uma reta racional l. Então $ext(l)$ pertence a $\mathcal{A}$ se e somente se $(l_2^2 + l_4^2 + l_5^2) - (l_0^2 + l_1^2 + l_3^2)$ é um quadrado perfeito.*

Demonstração: Se $\delta = (l_2^2 + l_4^2 + l_5^2) - (l_0^2 + l_1^2 + l_3^2)$ é um quadrado perfeito, então as coordenadas de $ext(l)$ na fórmula (8.1) são números inteiros. Portanto, $ext(l) \in \mathcal{A}$.

Reciprocamente, suponha que δ não é um quadrado perfeito. Visto que l intercepta $\mathbb{S}^2$, então pela fórmula (5.5), podemos concluir que $(l_2, l_4, l_5) \neq (0, 0, 0)$. Daí, pela fórmula (8.1), pelo menos uma das coordenadas homogêneas de $ext(l)$ é da forma $\alpha + l_i\sqrt{\delta}$, com α racional e $l_i \neq 0$. Como $\mu = l_2^2 + l_4^2 + l_5^2$ é um número racional, então a razão $(\alpha + l_i\sqrt{\delta})/\mu$ não é um número racional. Logo, $ext(l)$ não é um ponto racional. $\square$

Corolário 28 *Para toda reta racional l, $ext(l) \in \mathcal{A}$ se e somente se $ent(l) \in \mathcal{A}$.*

Teorema 29 *Um ponto p pertence a $\mathcal{A}$ se e somente se existem pelo menos duas retas racionais distintas l e m tais que $ext(l) = p = ext(m)$.*

DEMONSTRAÇÃO: Inicialmente, suponha que $p \in \mathcal{A}$. Sejam q_1 e q_2 dois pontos distintos de $\mathcal{A}$ tais que $q_1 \neq p \neq q_2$. Então, as duas retas $l = q_1 \vee p$ e $m = q_2 \vee p$ são racionais, são distintas (pois não há três pontos colineares em $\mathbb{S}^2$), e $ext(l) = p = ext(m)$.

Reciprocamente, sejam l e m duas retas racionais distintas tais que $ext(l) = p = ext(m)$. Se $l \neq \neg m$ então, pela fórmula (5.9), podemos concluir que $p = l \cap m$ é um ponto racional. Por outro lado, se $l = \neg m$ então o fato de que $ext(l) = ext(m)$ implica que l e m são tangentes a $\mathbb{S}^2$. Neste caso, $p = mid(l)$ e portanto, pela fórmula (8.1), p é um ponto racional. $\square$

Corolário 30 *Um ponto p pertence a $\mathcal{C} \setminus \mathcal{A}$ se e somente se existe uma única reta racional l tal que $p = ext(l)$.*

Corolário 31 *Um ponto p pertence a $\mathcal{B} \setminus \mathcal{A}$ se e somente se $l = O \vee p$ é a única reta racional tal que $p = ext(l)$.*

DEMONSTRAÇÃO: Para todo $p = [p_0, p_1, p_2, p_3] \in \mathbb{S}^2$, seja $l = O \vee p = \langle 0, 0, p_3, 0, -p_2, p_1 \rangle$. É fácil ver que $p = ext(l)$. Se $p \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{A}$, então p_1, p_2 e p_3 são números inteiros, o que implica que l é racional; além disso, pelo corolário 30, a reta l é única. Reciprocamente, se l é uma reta racional, então $dir(l) = [0, p_1, p_2, p_3]$ é uma direção racional e portanto $p \in \mathcal{B}$. Além disso, se l é única, pelo corolário 30, $p \notin \mathcal{A}$. $\square$

Teorema 32 *Um ponto p de $\mathbb{R}^3$ pertence a $\mathcal{C}$ se e somente se*

$$p = \left[a_0, a_1 + b_1\sqrt{c}, a_2 + b_2\sqrt{c}, a_3 + b_3\sqrt{c}\,\right] \tag{8.2}$$

onde a_0, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 e c são números inteiros que satisfazem às seguintes condições:

(i) $a_0 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 \neq 0$

(ii) $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$

(iii) $a_0(a_0 - c) = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$

Neste caso, $p = \langle\!\langle a_2 b_3 - a_3 b_2,\ a_3 b_1 - a_1 b_3,\ a_0 b_3,\ a_1 b_2 - a_2 b_1,\ -a_0 b_2,\ a_0 b_1 \rangle\!\rangle$

Demonstração: Inicialmente, vamos mostrar que todo ponto $p \in \mathcal{C}$ é da forma (8.2), sendo que os inteiros a_0, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 e c satisfazem as condições (i) — (iii).

Seja $\langle l_0, .. l_5 \rangle$ os coeficientes de Plücker inteiros de uma reta racional l tal que $ext(l) = p$. Tomando-se

$$\begin{array}{rclcrcl} a_0 & = & l_2^2 + l_4^2 + l_5^2 & \quad & b_1 & = & l_5 \\ a_1 & = & -l_1 l_2 - l_3 l_4 & & b_2 & = & -l_4 \\ a_2 & = & l_0 l_2 - l_3 l_5 & & b_3 & = & l_2 \\ a_3 & = & l_0 l_4 + l_1 l_5 & & c & = & a_0 - (l_0^2 + l_1^2 + l_3^2) \end{array} \tag{8.3}$$

temos que

(i) $a_0 = l_5^2 + l_4^2 + l_2^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$; e $a_0 \neq 0$, pois de acordo com a fórmula (5.5), se $l_2 = l_4 = l_5 = 0$ então l seria uma reta no infinito.

(ii) $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = l_5(-l_1 l_2 - l_3 l_4) - l_4(l_0 l_2 - l_3 l_5) + l_2(l_0 l_4 + l_1 l_5) = 0$.

(iii)
$$\begin{array}{rclcl} a_1^2 & = & (-l_1 l_2 - l_3 l_4)^2 & = & l_1^2 l_2^2 + l_3^2 l_4^2 + l_1 l_2 l_3 l_4 + l_1 l_2 l_3 l_4 \\ a_2^2 & = & (l_0 l_2 - l_3 l_5)^2 & = & l_0^2 l_2^2 + l_3^2 l_5^2 - l_0 l_2 l_3 l_5 - l_0 l_2 l_3 l_5 \\ a_3^2 & = & (l_0 l_4 + l_1 l_5)^2 & = & l_0^2 l_4^2 + l_1^2 l_5^2 + l_0 l_1 l_4 l_5 + l_0 l_1 l_4 l_5 \end{array}$$

Daí,

$$\begin{array}{rcl} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 & = & l_0^2(l_2^2 + l_4^2) + l_1^2(l_2^2 + l_5^2) + l_3^2(l_4^2 + l_5^2) + \\ & & + \, l_2 l_3(l_1 l_4 - l_0 l_5) + l_0 l_5(l_1 l_4 - l_2 l_3) + l_1 l_4(l_2 l_3 + l_0 l_5) \end{array}$$

Aplicando a condição de Plücker (5.3) em cada um dos três últimos termos, obtemos

$$\begin{array}{rcl} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 & = & l_0^2(l_2^2 + l_4^2) + l_1^2(l_2^2 + l_5^2) + l_3^2(l_4^2 + l_5^2) + \\ & & + \, l_2 l_3(l_2 l_3) + l_0 l_5(l_0 l_5) + l_1 l_4(l_1 l_4) \\ & = & l_0^2(l_2^2 + l_4^2 + l_5^2) + l_1^2(l_2^2 + l_4^2 + l_5^2) + l_3^2(l_2^2 + l_4^2 + l_5^2) \\ & = & (l_0^2 + l_1^2 + l_3^2)(l_2^2 + l_4^2 + l_5^2) \\ & = & a_0(a_0 - c) \end{array}$$

o que mostra que os inteiros a_0, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 e c satisfazem as condições (i) — (iii). Além disso, da fórmula (8.1), sabemos que

$$ext(l) \quad = \quad \left[\mu, -l_1 l_2 - l_3 l_4 + l_5\sqrt{\delta}, l_0 l_2 - l_3 l_5 - l_4\sqrt{\delta}, l_0 l_4 + l_1 l_5 + l_2\sqrt{\delta}\,\right] \tag{8.4}$$

onde $\mu = l_2^2 + l_4^2 + l_5^2 = a_0^2 b_3^2 + a_0^2 b_2^2 + a_0^2 b_1^2 = a_0^3$ e $\delta = \mu - (l_0^2 + l_1^2 + l_3^2)$.
Portanto, aplicando as respectivas equações dadas em (8.3) obtemos que

$$p = ext(l) = \left[a_0, a_1 + b_1\sqrt{c}, a_2 + b_2\sqrt{c}, a_3 + b_3\sqrt{c}\,\right]$$

o que mostra que p é da forma (8.2).

Reciprocamente, sejam a_0, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 e c números inteiros que satisfazem (i) — (iii) e seja

$$l = \langle\ a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_0b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1,\ -a_0b_2,\ a_0b_1\ \rangle$$

Pela condição (i), $a_0 \neq 0$ e existe $i \in \{1,2,3\}$ tal que $b_i \neq 0$. Desta forma, $a_0b_i \neq 0$, o que implica que pelo menos um coeficiente de l é diferente de zero. Visto que

$$l_0l_5 - l_1l_4 + l_2l_3 = a_0b_1(a_2b_3 - a_3b_2) - (-a_0b_2)(a_3b_1 - a_1b_3) + a_0b_3(a_1b_2 - a_2b_1) = 0$$

então a condição de Plücker (5.3) é satisfeita, o que mostra que a sêxtupla l define uma reta, obviamente racional.

Daí, pela fórmula (8.4),

$$\begin{aligned} l_0^2 + l_1^2 + l_3^2 &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\ &= a_2^2b_3^2 + a_3^2b_2^2 - 2a_2a_3b_2b_3 + a_1^2b_3^2 + a_3^2b_1^2 - 2a_1a_3b_1b_3 + \\ &\quad + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 - 2a_1a_2b_1b_2 \\ &= a_1^2(b_2^2 + b_3^2) + a_2^2(b_1^2 + b_3^2) + a_3^2(b_1^2 + b_2^2) - \\ &\quad -2a_1a_2b_1b_2 - 2a_1a_3b_1b_3 - 2a_2a_3b_1b_3 \end{aligned}$$

Usando a condição (ii) temos $(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2 = 0$, o que implica que $a_1^2b_1^2+a_2^2b_2^2+a_3^2b_3^2 = -2a_1a_2b_1b_2 - 2a_1a_3b_1b_3 - 2a_2a_3b_2b_3$. Portanto,

$$\begin{aligned} l_0^2 + l_1^2 + l_3^2 &= a_1^2(b_2^2 + b_3^2) + a_2^2(b_1^2 + b_3^2) + a_3^2(b_1^2 + b_2^2) + a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_3^2b_3^2 \\ &= a_1^2(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) + a_2^2(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) + a_3^2(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \\ &= a_0(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \end{aligned}$$

De onde obtemos que

$$\delta = \mu - (l_0^2 + l_1^2 + l_3^2) = a_0^3 - a_0(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) = a_0(a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} -l_1l_2 - l_3l_4 &= -(a_3b_1 - a_1b_3)a_0b_3 - (a_1b_2 - a_2b_1)(-a_0b_2) \\ &= -a_0a_3b_1b_3 + a_0a_1b_3^2 + a_0a_1b_2^2 - a_0a_2b_1b_2 \\ &= -a_0b_1(a_3b_3 + a_2b_2) + a_0a_1(b_2^2 + b_3^2) \\ &= a_0a_1b_1^2 + a_0a_1(b_2^2 + b_3^2) \\ &= a_0a_1(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) = a_0^2a_1 \end{aligned}$$