

Projeto de Pesquisa - FAPESP - Modalidade Temático

Métodos de Aproximação para Computação Visual

Equipe

Jorge Stolfi, IC-UNICAMP (SP) - Coordenador

Konradin Metze, FCM-UNICAMP (SP) - Pesq. Principal

Neucimar Jerônimo Leite, IC-UNICAMP (SP) - Pesq. Principal

Alexandre Xavier Falcão, IC-UNICAMP (SP) - Pesq. Colaborador

Anamaria Gomide, IC-UNICAMP (SP) - Pesq. Colaboradora

Cid Carvalho de Souza, IC-UNICAMP (SP) - Pesq. Colaborador

Margarete Oliveira Domingues, LAC-INPE (SP) - Pesq. Colaboradora

Pedro Jussieu de Rezende, IC-UNICAMP (SP) - Pesq. Colaborador

Randall Luis Adam, HC-UNICAMP (SP) - Pesq. Colaborador

Ricardo da Silva Torres, IC-UNICAMP (SP) - Pesq. Colaborador

Siome Klein Goldenstein, IC-UNICAMP (SP) - Pesq. Colaborador

Sônia Maria Gomes, IMECC-UNICAMP (SP) - Pesq. Colaboradora

Anselmo Antunes Montenegro, IC-UFF (RJ) - Pesq. Colaborador

Helena Cristina da Gama Leitão, IC-UFF (RJ) - Pesq. Colaboradora

Luiz Carlos Pacheco Rodrigues Velho, IMPA (RJ) - Pesq. Colaborador

Luiz Henrique de Figueiredo, IMPA (RJ) - Pesq. Colaborador

Marcus Vinícius Alvim Andrade, DPI-UFV (MG) - Pesq. Colaborador

Resumo

O objetivo deste projeto é o desenvolvimento de algoritmos, técnicas matemáticas e ferramentas de software para problemas de *computação visual*, baseadas em conceitos de *aproximação matemática*. *Computação visual* inclui geometria computacional, modelagem geométrica, síntese de imagens e animações, visualização científica, visão computacional, codificação e processamento de imagens e reconhecimento de padrões. Por *aproximação matemática* entende-se a substituição de um fenômeno real ou modelo matemático complexo por um modelo mais simples ou mais eficiente, *com garantias teóricas ou experimentais sobre os erros decorrentes dessa substituição*. Os sub-itens específicos deste projeto refletem a experiência acumulada e as idéias originais dos membros nas grandes áreas acima mencionadas, e oferecerão muitas oportunidades de sinergia e cooperação.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Aplicações	1
1.1.1	Aplicações biomédicas	1
1.1.2	Aplicações em comunicação, documentação e manufatura	2
1.1.3	Aplicações em bancos de dados visuais	2
1.2	Objetivos e resultados esperados	3
2	Métodos multi-escala	3
2.1	Bases para representação multi-escala de imagens e vídeos	3
2.1.1	Bases de wavelets e bases radiais	3
2.1.2	Splines diádicos	4
2.2	Representação multi-escala de terrenos para visibilidade	5
2.3	Morfologia matemática multi-escala de imagens	5
2.4	Registro multi-escala de imagens	6
2.5	Recuperação de imagens por comparação multi-escala	6
3	Métodos de aproximação na esfera e outras variedades	7
3.1	Aproximação com splines e bases radiais na esfera	7
3.1.1	Splines esféricos	7
3.1.2	Bases radiais na esfera	8
3.2	Splines em malhas circulares	8
3.3	Geometria computacional em espaços não euclidianos	8
3.3.1	Histórico	9
3.3.2	Geometrias absolutas	9
3.3.3	Geometrias de Incidência Ordenadas	9
3.3.4	Problemas de convexidade	10
3.3.5	Problemas de separabilidade	10
4	Análise fractal multi-escala	10
4.1	Análise de forma baseada na dimensão fractal	10
4.1.1	Dimensão fractal multi-escala e IFT	11
4.2	Análise de imagens para diagnósticos e prognósticos	11
5	Métodos de aproximação não-linear	12
5.1	Suavização geométrica de curvas	12
5.2	Determinação de contornos suaves para imagens binárias.	13
5.3	Segmentação de vídeos por movimento de câmera	14
5.4	Métodos fotométricos para visão 3D.	14
5.5	Rastreamento de objetos deformáveis	15
6	Métodos intervalares	16
6.1	Aplicação de aritmética afim em computação visual	16
6.2	Comparação garantida de imagens em escala reduzida	17

7	Aproximação de problemas contínuos por modelos discretos	17
7.1	Segmentação de imagens e vídeos	17
7.2	Determinação de correspondências aproximadas em imagens	18
7.3	Algoritmos heurísticos para o Problema da Galeria de Arte	19
7.3.1	Aproximação com grade induzidas	20
7.3.2	Critérios alternativos de avaliação	20
8	Anexos	21
8.1	Bancos de imagens biomédicas	21

1 Introdução

O objetivo deste projeto é o desenvolvimento de algoritmos, técnicas matemáticas e ferramentas de software para problemas de *computação visual*, baseadas em conceitos de *aproximação matemática*.

“*Computação visual*” é um nome conveniente para o conjunto de disciplinas que estudam a análise, processamento, geração e modelagem de imagens e vídeos digitais. Assim, este rótulo inclui geometria computacional, modelagem geométrica, síntese de imagens e animações, visualização científica, visão computacional, codificação e processamento de imagens e reconhecimento de padrões. Computação visual também é parte relevante de inúmeras disciplinas aplicadas, como informática médica, geoprocessamento, tecnologia aero-espacial, dados atmosféricos de tempo e clima, dados astrofísicos, dados relacionados ao clima espacial, exploração e preservação de recursos naturais, robótica e automação, planejamento urbano, projeto industrial, otimização, estatística, etc..

Por *aproximação matemática* entende-se a substituição de um fenômeno real ou modelo matemático complexo por um modelo mais simples ou mais eficiente, *com garantias teóricas ou experimentais sobre os erros decorrentes dessa substituição*. O conceito é tão antigo quanto a própria matemática (haja visto, por exemplo, o trabalho de Arquimedes sobre a quadratura do círculo), é fundamental para toda a computação numérica. Sua importância decorre do fato familiar que muitas equações diferenciais e problemas geométricos, mesmo os mais simples, não possuem soluções que possam ser descritas por fórmulas fechadas. Na última década, inclusive, formou-se o consenso na área de teoria da computação de que técnicas de aproximação fornecem a única solução prática para a classe de problemas ditos *NP-difíceis* — problemas combinatórios cujas soluções exatas são computáveis e facilmente verificáveis, mas que aparentemente não podem ser encontradas sem uma busca exaustiva de custo proibitivo.

Conforme se pode verificar pela lista de publicações, os participantes deste projeto têm tido bastante experiência com diversas técnicas de aproximação, em aplicações bastante variadas. Recentemente constatou-se que estas experiências são em parte complementares e em parte sobrepostas, havendo muita oportunidade para colaboração e sinergia.

Os sub-projetos descritos a seguir refletem esta observação. Cada sub-projeto envolve vários pesquisadores (e, naturalmente, seus alunos de pós-graduação); e, por outro lado, cada pesquisador geralmente participa de vários sub-projetos. Em todos os casos, os participantes já têm experiência com o problema, geralmente comprovada por publicações e/ou orientações sobre o assunto.

1.1 Aplicações

Os métodos matemáticos e computacionais estudados neste projeto são, de modo geral, diretamente motivados por aplicações práticas importantes.

Uma característica importante deste projeto é que, em muitos dos sub-projetos, o mesmo método matemático ou computacional em estudo têm diversas aplicações práticas, em áreas bastante variadas. Por exemplo, a determinação de correspondências em imagens (seção 7.2) é fundamental para visão 3D (seção 5.4), rastreamento de objetos deformáveis (5.5), segmentação de imagens e vídeos (7.1), alinhamento de imagens médicas (2.4), e vários outros problemas.

1.1.1 Aplicações biomédicas

Muitos dos sub-projetos versam sobre análise de imagens (incluindo imagens tridimensionais como tomogramas e vídeos). O objetivo geral desses sub-itens é a detecção e quantificação de estruturas, muitas vezes invisíveis para o observador humano.

Um dos problemas principais na análise visual de imagens médicas é a falta de concordância entre observadores humanos, mesmo entre especialistas treinados na área. Outro problema relacionado

é a incidência de erros devidos a cansaço, limitações na resolução e tamanho dos dispositivos de visualização, etc.. Métodos quantitativos de análise de imagens, como os que serão estudados neste projeto (seções 2.3, 4.1,), permitiriam reduzir as incertezas e confusões nos diagnósticos.

A análise quantitativa de imagens médicas pode produzir fatores prognósticos relevantes para prever a resposta terapêutica e a sobrevida do paciente, classificar os pacientes em grupos com evolução mais ou menos favorável etc., o que pode levar ao desenvolvimento de estratégias terapêuticas mais flexíveis. Vários dos sub-projetos (por exemplo, seções 4.2, 4.1 e 2.4) são voltados para estes objetivos.

Vale observar que a análise visual de imagens médicas é geralmente demorada e trabalhosa, e exige pessoal especialmente treinado; o que acaba sendo o fator limitante na produtividade de laboratórios de análise. A automação total ou parcial da análise permitirá que exames mais completos (como exames de lâmina inteira) sejam aplicados a um número muito maior de pacientes, pelo mesmo custo.

1.1.2 Aplicações em comunicação, documentação e manufatura

Outra grande área de aplicações relevante para este projeto é a análise de imagens e vídeos para fins de comunicação, monitoramento e documentação de eventos, inspeção industrial, segurança, identificação biométrica, etc.. Alguns exemplos, em que membros da equipe já têm experiência comprovada, incluem a análise quantitativa de partidas de futebol [56, 57], identificação de impressões digitais [26, 27] e a segmentação de vídeos [73, 10].

Há certos problemas matemáticos e computacionais que são recorrentes nessas aplicações, como rastreamento de objetos ou pessoas em uma seqüência de imagens, reconhecimento de padrões, ajuste de modelos geométricos a partir de imagens, e assim por diante. Vários sub-projetos deste projeto visam desenvolver ou aprimorar soluções para esses problemas (seções 2.4, 5.3, 5.5, 7.2).

1.1.3 Aplicações em bancos de dados visuais

Outra importante aplicação relevante para este projeto é facilitar o acesso ao enorme cabedal de conhecimento visual acumulado pela humanidade. Hoje em dia existem milhões de bancos de imagens de acesso público ou comercial, cobrindo uma grande variedade de temas e todo tipo de meios. Esses bancos de imagens poderiam ser extremamente úteis para muitos fins — científicos, médicos, tecnológicos, educacionais, etc.. Em particular, quase todo hospital, universidade ou centro de pesquisas biomédicas possui extensos arquivos de imagens médicas e biológicas (incluindo lâminas preparadas, filmes radiográficos e fotográficos e imagens digitalizadas), combinadas com dados clínicos, que seriam imensamente úteis para fins diagnósticos e prognósticos. Outro exemplo são imagens astronômicas de alta resolução (16.000×16.000 pixels ou mais), contendo milhares de objetos como galaxias e estrelas.

Porém, mesmo quando as imagens estão disponíveis pela internet, esse potencial não é realizado devido à impossibilidade de localizar as imagens relevantes a cada caso [11].

A análise, classificação, comparação e localização automática das imagens é o único meio viável de remover esse obstáculo. Há muita demanda, em particular, por algoritmos para *recuperação* ou *localização de imagens por conteúdo* (*content-based image retrieval*, CBIR) — isto é, a partir de atributos gráficos como cor, textura e forma dos objetos retratados. Uma variante comum é a *recuperação por exemplo* — em que o usuário fornece uma imagem-modelo J , e o sistema procura encontrar, dentre as imagens $\{I_1, I_2, \dots, I_m\}$ do banco, a imagem mais parecida com J (ou todas as imagens suficientemente parecidas com J). Vários dos sub-projetos objetivam desenvolver métodos

que tornam esta tarefa mais rápida e/ou mais precisa, ou critérios de similaridade de imagens apropriados para certos tipos de busca (seções 2.5, 4.1 e 6.2).

1.2 Objetivos e resultados esperados

Os resultados deste projeto serão apresentados em congressos nacionais e internacionais de reconhecida importância, e publicados em periódicos científicos de qualidade. Este projeto também contribuirá significativamente para a formação de pesquisadores, pois muitos de seus sub-projetos são (ou devem vir a ser) assunto de trabalhos de Iniciação Científica, dissertações de Mestrado e teses de Doutorado. Em algumas das áreas abordadas, há também potencial significativo para o desenvolvimento de procesos patenteáveis [2, 51, 122].

2 Métodos multi-escala

2.1 Bases para representação multi-escala de imagens e vídeos

O objetivo deste sub-projeto é desenvolver representações inovadoras de imagens e vídeos segundo a técnica *multi-escala*. Esta é uma técnica geral bem estabelecida, que, em muitos problemas, permite obter algoritmos mais confiáveis e/ou eficientes do que as soluções que consideram apenas a imagem na sua escala original [132, 89, 136, 128]. Na abordagem multi-escala, cada imagem é representada por uma *hierarquia* ou *pirâmide* de versões reduzidas em progressão geométrica. Algoritmos multi-escala resolvem o problema para cada nível da hierarquia, da versão mais reduzida até a imagem original, usando a solução do nível anterior (mais grosseiro) como estimativa inicial ou “dica” para resolver o nível corrente (mais detalhado).

Para imagens que combinam regiões relativamente suaves separadas por linhas de descontinuidade (incluindo boa parte das fotos digitais e desenhos esquemáticos), é possível reduzir ainda mais o custo em espaço e tempo usando-se uma representação *esparsa* da imagem. Nesta variante, em cada nível da hierarquia são armazenadas apenas os elementos (*pixels*) da imagem que contém detalhes significativos na escala desse nível, ou de níveis mais detalhados. Assim, por exemplo, as regiões relativamente suaves seriam representadas apenas nos níveis superiores da hierarquia, enquanto que no nível inferior seriam registradas apenas as descontinuidades. Desta forma, o número total de elementos armazenados e processados pode ser reduzido por um fator proporcional a $1/\sqrt{N}$, onde N é o número de elementos na imagem original.

2.1.1 Bases de wavelets e bases radiais

Há inúmeras variações nesta abordagem, diferindo por exemplo na natureza dos elementos armazenados em cada nível. A teoria das *wavelets* [90, 132] providenciou uma base teórica mais firme para a abordagem multi-escala, e introduziu representações mais sofisticadas para os níveis da hierarquia. Uma base de wavelets $\phi_{r_i}(x)$ é tipicamente formada por cópias de uma única *função geradora* ou *função-mãe* $\psi(x)$, sendo cada cópia reduzida em escala por um fator 2^{-r} e deslocada para algum ponto x_i de uma grade regular com passo 2^{-r} .

Uma alternativa a wavelets, bastante popular na teoria e na prática, são as *bases radiais*. Uma base radial $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ consiste de elementos da forma $\phi_k(x) = \psi(|x, x_k|)$, onde os parâmetros x_k são pontos do domínio de interesse, $|\cdot, \cdot|$ é alguma função-distância entre pontos do domínio, e ψ é uma *função geradora* fixa de uma variável. Por exemplo, a escolha $\psi(r) = \exp(-r^2/\sigma^2)$ com distância euclidiana produz as *bases radiais gaussianas*, enquanto que $\psi(r) = r^2 \log r$ produz os *splines de placas finas* (*thin plate splines*). Dependendo da escolha função ψ , as funções aproximantes geradas por esses elementos podem ser infinitamente diferenciáveis ou suave por partes.

Na versão multi-escala desta abordagem, usa-se um conjunto maior e mais denso de pontos x_i , e possivelmente uma função geradora diferente, em cada escala.

Comparadas com bases de wavelets e outras alternativas, as bases radiais têm a vantagem de não exigir uma malha regular sobre o domínio; basta existir um meio de calcular a distância entre dois pontos. Portanto, elas podem ser facilmente usadas em espaços de dimensão arbitrária, sobre variedades, em domínios de formas irregulares, etc.. Elas são especialmente apropriadas para a interpolação de dados provenientes de amostras não uniformes.

Neste sub-projeto, pretendemos continuar as investigações feitas em colaboração com pesquisadores da Universidade de Uppsala (Suécia), sobre o uso de bases radiais para integração adaptativa de equações diferenciais, dispensando a construção de malhas. (Esta abordagem pode ser comparada ao uso de *wavelets* neste tipo de problema.)

2.1.2 Splines diádicos

Outra abordagem geral para a representação multi-escala são funções polinomiais por partes (*splines*) sobre uma hierarquia de malhas cuja resolução depende do nível. Esta abordagem pode ser usada com malhas regulares ou irregulares de geometrias diversas, e partes de graus diversos, resultando em uma grande variedade de representações específicas, muitas das quais ainda inexploradas.

Neste sub-projeto pretendemos considerar, em especial, as *malha diádicas* usados com sucesso por Cardoso e outros [16, 17]. Uma malha diádica é uma hierarquia de malhas obtida a partir de uma caixa n -dimensional por bissecções múltiplas, sendo que no nível i da hierarquia todos os planos de corte são perpendiculares ao eixo $i \bmod n$. Veja a figura 1.

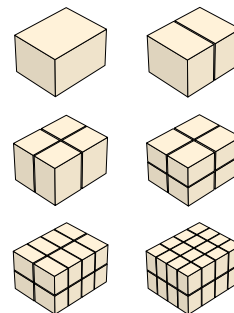


Figura 1:

Nosso interesse neste sub-projeto são os *splines diádicos*, splines polinomiais definidos sobre malhas diádicas. A principal vantagem de tais splines sobre splines em geral é a simplicidade topológica da malha diádica, que reduz bastante a complexidade dos algoritmos em muitas aplicações, especialmente os que exigem malhas adaptativas e dinâmicas.

As malhas diádicas podem ser vistas como uma variante das malhas *quad-tree* e *k-d-tree* [3]. Membros do projeto têm experiência com o uso destas grades na integração de equações diferenciais parciais evolutivas [43], trabalho esse que pode ser facilmente adaptado e generalizado para malhas diádicas.

Os splines diádicos prestam-se especialmente à modelagem de funções com restrições de continuidade mínima. Para esse fim, usam-se splines polinomiais com restrições apropriadas sobre retalhos adjacentes.

Cada spline é representado pelos seus coeficientes relativos a uma base compacta do sub-espaço dos splines definido por essas restrições — os *elementos finitos* desse sub-espaço. Veja a figura 2. Estes coeficientes capturam todos os graus de liberdade do spline, sem redundância.

Os elementos finitos de splines diádicos podem ser comparados a wavelets, pois eles também podem ser obtidos a partir de um elemento-mãe por rotação, translação e redução de escala. Entretanto, splines diádicos (como splines em geral) sacrificam a ortogonalidade em prol da eficiência na avaliação.

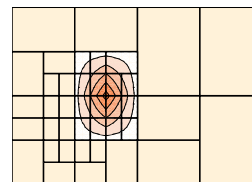


Figura 2:

Em projeto anterior, utilizamos splines diádicos para simulação de escoamento em reservatórios petrolíferos [16, 17]. Neste projeto, esperamos mostrar as vantagens deste tipo de splines para problemas de computação visual, como por exemplo o registro de imagens médicas sob deformações contínuas, a representação multi-escala de imagens e vídeo, e assim por diante.

Pesquisadores envolvidos: A. Gomide, J. Stolfi, S. Gomes, M. Domingues, L. Velho.

2.2 Representação multi-escala de terrenos para visibilidade

Uma aplicação importante de splines é a modelagem digital do relevo de regiões geográficas [54, 86]. Um *terreno digital* é um spline que representa a altitude de uma região em função de coordenadas geográficas, como latitude e longitude. A representação mais popular são splines de primeiro grau em malhas triangulares irregulares, mas outros tipos (como splines bilineares em malhas diádicas) podem ser usados.

Uma característica que distingue terrenos digitais de outras aplicações de splines é a complexidade de instâncias típicas. Por exemplo, um modelo digital da superfície terrestre com resolução de 1m teria da ordem de 10^{14} pontos. A simples visualização de tal volume de dados exige o uso de modelos multi-escala com resolução adaptativa dinâmica. Especificamente, para visualizar as partes do terreno mais distantes do observador, pode-se (e deve-se) usar uma aproximação mais grosseira do que para as partes mais próximas.

Nessas simplificações, as medidas tradicionais de erro de aproximação (como a distância média quadrática) nem sempre são adequadas. Um critério importante para várias aplicações (incluindo planejamento ambiental, comunicações, hidrologia, vigilância, etc.) é a representação correta da visibilidade entre pontos do terreno e/ou pontos de observação especificados [36, 62, 114, 135, 109, 59, 61, 19, 94, 120, 134].

Neste sub-projeto, estudaremos métodos de simplificação de terrenos e representações multi-escala que levam em conta este critério, baseados no trabalho de Franklin e outros [60, 63].

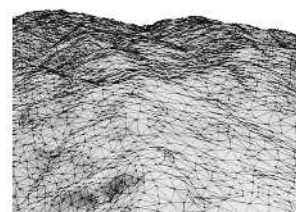


Figura 3:

Pesquisadores envolvidos: M. Andrade, A. Gomide, J. Stolfi.

2.3 Morfologia matemática multi-escala de imagens

Este sub-projeto objetiva identificar métodos eficientes de simplificação da “topografia” de uma imagem através de um processo de transformação multi-escala, no contexto das teorias do espaço-escala não-linear e morfologia matemática (MM) [77]. A abordagem consiste de transformações sucessivas da imagem original que reduzem monotonicamente os seus extremos (mínimos e máximos regionais) e definem, em cada escala de representação, uma imagem topograficamente mais simples à medida que as escalas aumentam. Estes diversos níveis de transformação da imagem original poderão estar associados à métodos de processamento e análise de imagens envolvendo, entre outros, descrição, representação e segmentação. Alguns resultados nesta linha já foram publicados por N. Leite e L. Dorini [84, 83].

Outra abordagem multi-escala visa uma descrição de alto nível de uma imagem a partir da noção de resíduos morfológicos definidos através de diferenças entre níveis sucessivos de uma imagem submetida a uma família de transformações crescentes. A operação de abertura morfológica

é considerada na definição destas transformações que resultam em diversos níveis residuais cuja informação pode ser empregada na extração de atributos geométricos e topológicos, e que podem ser usados em problemas de segmentação e identificação de imagens com base em seu conteúdo.

Métodos eficientes para a obtenção dos diversos níveis residuais e extração de atributos devem ser investigados visando a redução do elevado tempo computacional, típico deste tipo de processamento.

Pesquisadores envolvidos: N. Leite.

2.4 Registro multi-escala de imagens

Neste sub-projeto, o objetivo é desenvolver algoritmos robustos e eficientes para *registro* (alinhamento) de duas ou mais imagens afetadas por deformações arbitrárias.

Para esta apresentação, podemos definir uma imagem como uma função parcial do plano \mathbb{R}^2 para algum espaço V de valores (por exemplo, intensidades de luz, cores, etc.) Dadas duas imagens $I(p)$ e $J(p)$, o problema aqui tratado consiste em encontrar uma *função de deformação* d , de \mathbb{R}^2 para \mathbb{R}^2 , tal que $J(d(p))$ é semelhante a $I(p)$, segundo algum critério.

Devido à importância e complexidade desta aplicação, o problema de registro de imagens com deformação foi extensivamente estudado nas últimas décadas, e ainda é um campo fértil para pesquisas. Há espaço ainda tanto para novas maneiras de descrever as deformações, quanto para novos algoritmos de construção das mesmas.

A aplicação de referência para este problema é o alinhamento de imagens médicas de um mesmo paciente, obtidas em momentos diferentes ou com dispositivos diferentes. Entretanto, devido à flexibilidade dos órgãos, traumas, cirurgias e processos naturais de deformação (como crescimento, adaptação, inflamação, cicatrização, etc.), raramente é possível obter o registro perfeito por simples translação ou rotação. Em geral, é necessário deformar uma das imagens de maneira mais ou menos irregular.

Além de permitir a comparação direta das duas imagens, a função d é importante por si mesma, pois fornece uma medida da diferença geométrica entre as duas imagens — o crescimento de um órgão ou lesão, deslocamentos, fraturas, cicatrizações, etc.

Muitos dos trabalhos anteriores sobre este assunto usam splines de vários tipos para representar a função de deformação, ou bases radiais (como as deformações elásticas de placas finas, descritas na seção 2.1). Neste sub-projeto planejamos avaliar splines diádicos para esse fim. Tais splines prestam-se naturalmente ao desenvolvimento de algoritmos para registro usando técnicas multi-escala.

Pesquisadores envolvidos: A. Falcão, A. Gomide, J. Stolfi, L. Velho.

2.5 Recuperação de imagens por comparação multi-escala

Este sub-projeto visa desenvolver métodos para busca de imagens por conteúdo (seção 1.1.3) baseados no conceito de *comparação multi-escala*. Para simplificar, vamos supor que o critério de similaridade entre a imagem J fornecida pelo usuário e uma imagem genérica I_k do banco é a distância euclidiana $|J - I_k|$, sendo cada imagem tratada como um vetor de n números (as intensidades dos pixels). A solução trivial — busca exaustiva — é inviável, pois seu custo proporcional a mn , onde m é o número de imagens no banco; e em muitas aplicações reais m e n são 10^6 ou mais.

Para certos tipos de imagens e buscas, uma solução mais eficiente pode ser obtida com técnicas de *busca multi-escala*. Nesta abordagem, faz-se inicialmente uma busca rápida em uma versão do banco onde todas as imagens foram reduzidas a poucos pixels. Esta busca é rápida porque o número de pixels n por imagem é pequeno; mas, apesar de imprecisa, ela muitas vezes permite eliminar do

banco as imagens que são muito diferentes de J . Este processo é repetido com imagens de resolução cada vez maior, terminando com imagens na resolução original. Em condições apropriadas, o número de imagens m diminui à medida que n aumenta, de modo que o custo total acaba sendo bem menor que o da busca trivial.

Acreditamos que esta abordagem pode ser adaptada e generalizada para efetuar muitas outras variantes de busca de imagens por conteúdo. Em particular, pretendemos estendê-la para o problema de buscas parciais e/ou aproximadas, em que o objetivo é encontrar imagens I_k que possuam a imagem J como sub-imagem, possivelmente modificada por mudança de escala, rotações, deformações dos objetos (como discutido na seção 5.5), mudanças de cores, etc.. As ferramentas de *comparação flexível multi-escala* desenvolvidas por membros da equipe para reconstrução de objetos fragmentados [82, 23] serão relevantes para este sub-projeto.

Pesquisadores envolvidos: J. Stolfi, H. Leitão.

3 Métodos de aproximação na esfera e outras variedades

3.1 Aproximação com splines e bases radiais na esfera

Diversas aplicações computacionais exigem a modelagem de *funções esféricas* — funções definidas na superfície da esfera unitária do \mathbb{R}^3 , o conjunto $\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\}$.

Exemplos importantes de funções esféricas são dados geofísicos, como altitude, potencial gravitacional, insolação, etc.; e variáveis meteorológicas, como pressão atmosférica, umidade, temperatura, etc.. Outros exemplos relevantes para computação visual são o fluxo de luz numa cena, a função de tonalização, e a função bidirecional de distribuição de radiancia (FBDR), descritas na seção 5.4.

No estado atual da arte, uma função deste tipo é geralmente modelada por uma série de harmônicos esféricos. Apesar de matematicamente elegante, esta representação é computacionalmente cara, porque todos os termos da série precisam ser calculados sempre que a função deve ser avaliada em algum ponto p do domínio. Daí o interesse em representações alternativas usando bases locais, multi-escala e esparsas — como as bases de wavelets, bases radiais, e elementos diádicos descritos na seção 2.1.

3.1.1 Splines esféricos

Neste sub-projeto, propomos continuar nossas investigações sobre uso de splines esféricos, como definidos por Gomide e Stolfi [71], para representação de funções esféricas. Veja a figura 4. Pretendemos, em particular, desenvolver representações adaptativas e multi-escala, usando uma hierarquia de grades triangulares sobre a esfera; e aplicar a elas a técnica do *mapa de erro*, uma ferramenta de análise que desenvolvemos em projeto anterior [72].

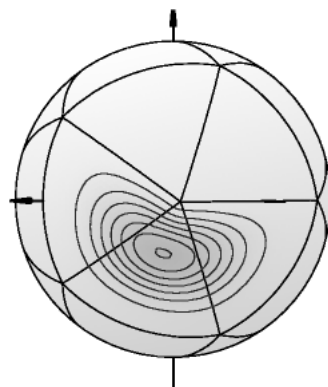


Figura 4: Um spline esférico.

3.1.2 Bases radiais na esfera

Pretendemos também dar continuidade a trabalhos iniciados por S. Gomes na Universidade de Leicester (Inglaterra). Um assunto que estudamos nessa ocasião foi a aproximação multi-resolução de funções na esfera por meio de bases radiais derivadas de harmônicos esféricos de banda limitada. Obtivemos resultados originais sobre a ordem de convergência desse tipo de aproximação na norma de Sobolev [68, 67].

Nessa ocasião, também consideramos o problema de aproximações no toro usando outro tipo de bases radiais, os *sk-splines*. Usando conceitos da teoria dos números, mostramos que a localização apropriada dos pontos centrais permite aumentar a ordem do erro de interpolação para funções regulares [70, 69].

Pesquisadores envolvidos: M. Andrade, A. Gomide, S. Gomes, A. Montenegro, J. Stolfi.

3.2 Splines em malhas circulares

Em projetos anteriores, M. A. Andrade e J. Stolfi desenvolveram estruturas de dados e algoritmos exatos para a representação da topologia e geometria de *mapas esféricos* — malhas sobre a esfera S^2 , cujas arestas são arcos de círculo de raios variados. Esses mapas surgem naturalmente em várias aplicações, especialmente em sistemas de informações geo-referenciadas, processamento de imagens de satélites, iluminação e robótica [8, 6, 7]. Veja a figura 5.

Neste sub-projeto pretendemos continuar desenvolvendo esses algoritmos. Em particular, almejamos melhorar a eficiência do algoritmo de localização [5], adaptando para a geometria circular a técnica de partição binária do espaço [97], que permite a localização de um ponto em $O(\log n)$ operações num mapa de n elementos; e a técnica de grade de indexação, que reduz esse custo para $O(1)$.

O próximo tema nessa linha de pesquisa, que pretendemos abordar neste projeto, é desenvolver uma teoria de splines na esfera compatíveis com esse tipo de malha. Para esse fim será necessário desenvolver algoritmos efetivos para construção de splines e elementos finitos com ordem de continuidade especificada.

Através de projeção estereográfica, os mapas esféricos produzem mapas no plano cujas arestas são segmentos de retas e arcos de círculos; e os splines polinomiais esféricos produzem splines racionais, mantendo a ordem de continuidade. Acreditamos que tais splines, que tem sido muito pouco estudados até o momento, encontrarão muitas aplicações práticas — por exemplo, na análise de peças mecânicas bidimensionais, que freqüentemente têm contornos com essa geometria.

Pesquisadores envolvidos: M. Andrade, A. Gomide, J. Stolfi.

3.3 Geometria computacional em espaços não euclidianos

Este sub-projeto objetiva estudar problemas em geometrias de incidência ordenadas (GIOS) [9]. Estas constituem-se em uma generalização das geometrias de Beckenbach — para as quais Peixoto provou que há uma conveniente extensão da noção de convexidade [117] — assim como das geometrias de Drandell [45].

Nosso trabalho pretende estabelecer que os predicados e construções geométricas computáveis no plano euclidiano por meio de operações vetoriais podem ser realizados em GIOS a partir das noções de incidência e da relação de ordem advinda do conceito de *betweenness*.

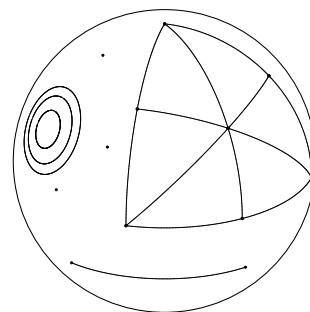


Figura 5:

Como conseqüência, mostraremos que algoritmos eficientes podem ser desenvolvidos e/ou adaptados de seus contra-partes euclidianos para solução de problemas de convexidade e de separabilidade.

3.3.1 Histórico

Desde a criação da área de geometria computacional, a grande maioria das pesquisas foram feitas no contexto da geometria euclidiana [126, 108, 115, 131, 78, 47, 119, 137, 28, 41, 112, 18]. Não obstante, tem havido interesse constante em problemas formulados no contexto de extensões da geometria euclidiana e em geometrias não-euclidianas. Dentro da geometria projetiva (orientada ou não) podemos citar os trabalhos de Oliveira, Pinto, Rezende, Selmi-Dei e Westrupp [110, 42, 40, 118, 39], Farin [53], e Stolfi [131]. Vários pesquisadores estudaram geometria computacional com métricas não-euclidianas, como Harada [74], Chew e Drysdale [46, 20], Klein [79], Rawlins e Wood [121], e Edelsbrunner e outros [48]. O trabalho de Onishi [111] trata da geometria hiperbólica.

3.3.2 Geometrias absolutas

Nosso interesse neste projeto são problemas formulados no contexto das *geometrias absolutas*, que satisfazem os quatro primeiros postulados de Euclides, mas não necessariamente o quinto — o postulado das paralelas. Há poucos trabalhos conhecidos sobre essa área, dentre eles os de Harada [74] e F. Figueiredo [55], nos quais são descritos algoritmos para alguns problemas.

Para problemas de convexidade nessas geometrias, em particular, há os trabalhos pioneiros de Peixoto [117], Drandell [45], e mais recentemente Ben-Tal e Ben-Israel [9]. Nesses artigos, são obtidos vários resultados importantes para a verificação de primitivas geométricas necessárias para o desenvolvimento de algoritmos. Nesta área, obtivemos recentemente alguns resultados [38].

3.3.3 Geometrias de Incidência Ordenadas

O trabalho original de Peixoto [117] generalizou a noção de convexidade do plano a geometrias de Beckenbach, onde linhas são gráficos de funções e retas verticais, sob certas condições razoavelmente fracas. Este trabalho foi mais tarde estendido por Drandell [45] que considerou famílias mais gerais de curvas, e por Ben-Tal e Ben-Israel em [9]. O produto final desta linha de trabalhos foi a axiomatização das *geometrias de incidência ordenada* (GIOS).

Formalmente, uma geometria de incidência ordenada $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ consiste da esfera de inversão de Riemann \mathcal{R}^2 (o conjunto dos *pontos* de $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$), e de uma por uma família \mathcal{F} de curvas em \mathcal{R}^2 (o conjunto das *retas*) que satisfaz as seguintes propriedades:

- I. Cada elemento de $F \in \mathcal{F}$ é uma curva de Jordan fechada que passa pelo ponto no infinito ω ;
- II. Dados dois pontos distintos quaisquer em $\mathcal{R}^2 \setminus \{\omega\}$, existe uma única curva em \mathcal{F} que passa por eles.

Estas geometrias constituem-se em um ambiente minimamente axiomatizado para o desenvolvimento de teoremas fundamentais de convexidade que usualmente aparecem apenas no contexto de espaços vetoriais lineares. A axiomatização utiliza apenas incidência, ordem e, para separabilidade, completude, sem depender de nenhuma estrutura de espaço vetorial.

Não é difícil verificar que qualquer OIG $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ satisfaz os quatro primeiros postulados de Euclides o que mostra que $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ é sempre uma geometria absoluta.

Neste sub-projeto, estudaremos propriedades de *geometrias de incidências ordenadas*. Na mesma linha dos problemas que vimos estudando na geometria de Beckenbach, nosso trabalho

consistirá em investigar a suficiência da estrutura de geometrias de incidência ordenadas *completas* (GIOCs) para o desenvolvimento de algoritmos eficientes, inicialmente, para problemas de convexidade (construção de envoltória convexa, determinação de diâmetro, menor círculo envolvente, núcleo de um polígono, etc.), e, posteriormente, de separabilidade e intersecção (problemas de separação de conjuntos, simplicidade de polígonos, enumeração de intersecções, etc.), e de proximidade (problemas de vizinhos mais próximos, maior círculo vazio, diagramas de Voronoi, triangulações, etc.).

3.3.4 Problemas de convexidade

O conceito de convexidade que usamos é o formulado por Drandell [45]. Por definição, um subconjunto S de $\mathcal{R}^2 \setminus \{\omega\}$ é dito *convexo em relação a* uma geometria $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$, ou $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -convexo, se a intersecção de S com qualquer reta de $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ é vazia ou conexa. A partir desta definição obtém-se inúmeros outros conceitos, como envoltória convexa, polígonos convexos, diâmetro de conjuntos, etc. A construção eficiente desses objetos, no contexto fraco das GIOs, ainda é um campo parcialmente inexplorado.

3.3.5 Problemas de separabilidade

Outra classe grande de problemas formuláveis nas GIOs são questões de separabilidade e intersecção de conjuntos. Dizemos que dois subconjuntos X e Y de $\mathcal{R}^2 \setminus \{\omega\}$ são *linearmente separáveis*, relativamente a uma geometria $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$, se existe uma reta C em \mathcal{F} tal que X e Y estão em componentes distintas de $\mathcal{R}^2 \setminus \{\omega\} \setminus C$. Problemas de separabilidade para conjuntos finitos de pontos podem ser formulados como um problema de *programação $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -linear*, semelhante à programação linear da geometria euclidiana; o que pode permitir a obtenção de solução em tempo $O(n)$ pelas técnicas de decimação de Megiddo [96].

Similarmente, acreditamos que essa mesma abordagem permita resolver em tempo $O(n)$ o problema da construção do menor $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ -círculo envolvente de um conjunto de pontos, similarmente ao caso euclidiano [119].

Pesquisadores envolvidos: P. Rezende.

4 Análise fractal multi-escala

4.1 Análise de forma baseada na dimensão fractal

Este sub-projeto tem por objetivo o desenvolvimento de *descritores de formas*, baseados em análise multi-escala e fractalidade. As aplicações motivadoras incluem a busca e recuperação de imagens por conteúdo (seção 1.1.3), a classificação de e análise de imagens citológicas e histológicas para fins clínicos (seção 4.2).

O problema fundamental nestas aplicações é calcular uma medida quantitativa da similaridade entre duas imagens. Uma abordagem bastante difundida é pré-processar cada imagem por algoritmo de *extração de características* que codifica as propriedades visuais relevantes da mesma em um *descriptor*, um vetor do \mathbb{R}^n . Usa-se então uma *função de distância* apropriada entre tais vetores para estimar a (dis)similaridade das imagens. De modo geral, a escolha do descriptor depende da natureza das imagens, do objetivo da busca, e dos recursos computacionais disponíveis para a tarefa (como memória, tempo de processamento e taxas de transmissão de dados).

Há uma vasta literatura propondo e analisando inúmeros tipos de descritores, para todo tipo de imagens e aplicações. Estes incluem descritores de Fourier [140], os momentos de inércia de Hu [76], curvatura multi-escala [1, 102], a transformada de eixo medial de Blum [13], a transformada “R” de Tabbone et al. [133] (uma variante da transformada de Radon), o espaço de escala de curvatura

proposto Mokhtarian et al. [103] (adotado pelo MPEG-7 [14]), as estatísticas de ângulos de raios (*beam angle statistics*) de Arica et al. [87], e o descritor de saliências de Torres et al. [24], entre outros. Há também inúmeros trabalhos sobre a simplificação de formas, inclusive para acelerar a comparação; como a descrição hierárquica de contornos de Meer, Sher e outros [95], Figueiredo e Stolfi [32] e Leitão e Stolfi [82, 23], e o espaço de curvatura-escala de Mokhtarian [104], para citar apenas alguns.

4.1.1 Dimensão fractal multi-escala e IFT

Neste sub-projeto planejamos avaliar e aperfeiçoar alguns descritores de forma que desenvolvemos recentemente. Inicialmente, pretendemos nos concentrar no descritor *dimensão fractal multi-escala do contorno* (DFME) [25]. O conceito de dimensão fractal [91] serviu de base para vários descritores robustos e eficientes [12, 101, 103]; nossa proposta estende esse conceito para uma função ao invés de um valor constante, o que permite uma análise mais abrangente da complexidade de uma forma.

A dimensão fractal multi-escala pode ser calculada através da *transformada imagem-floresta* (*image foresting transform*, IFT) de Falcão et al. [25, 52]. O algoritmo constrói a IFT da forma em questão, e extrai da mesma um histograma dos custos. A dimensão fractal multi-escala do contorno (e, em particular, o descritor de forma DFME) é obtida então ajustando-se um polinômio ao histograma, em escala logarítmica, pelo método dos mínimos quadrados.

A Figura 6 apresenta uma imagem binária do conjunto fractal conhecido como *estrela de Koch* (no alto) e o gráfico de $\log A(r)$ em função $\log r$ (no centro), onde $A(r)$ é a área da figura que pode ser coberta com círculos inscritos de raio r . Os dados para este gráfico foram obtidos através da IFT e aproximados por um polinômio de grau 10. O descritor DFME é a dimensão fractal calculada a partir da função $A(r)$, também em função de r (em baixo).

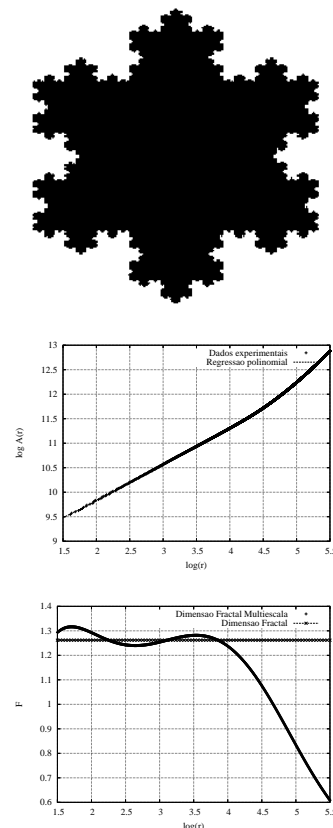


Figura 6:

Pesquisadores envolvidos: R. Torres, A. Falcão.

4.2 Análise de imagens para diagnósticos e prognósticos

O objetivo geral deste sub-projeto é a análise de imagens histopatológicas e citológicas a fim de extrair informações relevantes para diagnósticos e prognósticos (seção refs.apbio).

Um exemplo interessante de análise de imagens para fins clínicos é a comparação de uma imagem do lado esquerdo do corpo com a imagem correspondente do lado direito evidenciar diferenças que podem ter interesse médico. Por exemplo, a epilepsia e outras doenças cerebrais causam alterações peculiares na anatomia do cérebro humano, que podem ser detectadas comparando-se os dois hemisférios do cérebro. Para automatizar este tipo de comparação, é necessário que as imagens sejam adequadamente alinhadas, como descrito na seção 2.4.

Pretendemos dedicar especial atenção neste sub-projeto a métodos baseados na análise da *textura* de imagens e de contornos de formas. As principais ferramentas matemáticas relevantes são as

técnicas de análise multi-escala da imagem (seção 2), especialmente os vários métodos para calcular a dimensão fractal de contornos (seção 4.1) e métodos baseados em wavelets (seção 2.1). Pretendemos também investigar métodos de classificação baseados na *entropia* de imagens histológicas e citológicas digitalizadas, em várias formulações (entropias de Shannon, entropias aproximadas de Pincus e entropia de Tsallis, etc.).

A relevância biológica ou clínica dos métodos desenvolvidos poderá ser testada com bases de dados obtidas pelos pesquisadores em projetos anteriores. Atualmente dispomos de 10 bancos de dados temáticos, cada qual contendo entre 300 e 19,000 imagens citológicas, histológicas ou clínicas (apêndice 8.1).

A utilidade dos parâmetros novos será comparada com descritores da textura já conhecidos, tais como as variáveis da morfometria geométrica, da matriz de co-ocorrência e as variáveis derivadas da transformada de Fourier. Finalmente, elaboraremos algoritmos relevantes para o diagnóstico ou prognóstico, usando novos parâmetros da textura extraídos de imagens histológicas ou citológicas digitalizadas.

Pesquisadores envolvidos: R. Adam, K. Metze, N. Leite, R. Torres, A. Falcão.

5 Métodos de aproximação não-linear

5.1 Suavização geométrica de curvas

O objetivo deste sub-projeto é aperfeiçoar métodos consistentes para suavização de curvas baseados em critérios geométricos em vez de paramétricos (por exemplo, curvatura em vez de segunda derivada).

A suavização de funções é um problema muito bem estudado, para o qual existem ferramentas satisfatórias baseadas na análise de Fourier. Além de oferecer uma sólida base conceitual para essas ferramentas, a teoria de Fourier, por ser baseada em decomposição linear, leva a algoritmos eficientes, robustos, predizíveis e relativamente fáceis de implementar.

Por outro lado, o problema da suavização de curvas ainda carece de solução satisfatória. A origem desse impasse é a falta de uma teoria linear que permita entender uma curva como combinação de curvas em várias escalas de detalhe. Embora uma curva plana possa ser analisada como duas funções $X(t)$ e $Y(t)$, a parametrização natural — em que t é o comprimento da curva — não leva a uma teoria linear. Por exemplo, se (X, Y) e (X', Y') são duas curvas naturais, a soma $(X + X', Y + Y')$ geralmente não é natural. Uma consequência deste fato é que a suavização linear de $X(t)$ e $Y(t)$ como sinais tem efeitos mais drásticos justamente onde a curva já é mais suave; e pode inclusive tornar a curva *menos* suave.

Outras abordagens mais promissoras para este problema baseiam-se em analogias físicas. Por exemplo, a curva pode ser vista como uma frente de onda, ou como a fronteira entre dois líquidos não miscíveis. Estas analogias levam a equações diferenciais que descrevem uma evolução da curva no tempo. Tipicamente, usa-se uma equação de *difusão de curvatura*, que especifica um deslocamento da curva na direção normal, com velocidade proporcional à curvatura local; de modo que a curva tende a ficar mais suave à medida que o tempo passa.

Entretanto, estas abordagens também tem várias limitações. Por exemplo, processos de difusão de curvatura geralmente acabam contraindo todas as curvas para pontos, e não garantem que a curva fique realmente mais suave. Veja a figura 7, coluna da esquerda.

Em projetos anteriores, Leitão e Stolfi estudaram uma abordagem alternativa para o problema que alivia essas limitações. A idéia usar filtragem linear nos sinais $X(t)$ e $Y(t)$, mas usar como parâmetro t o comprimento da curva *após a filtragem*. Este método é necessariamente iterativo, mas, ao contrário da difusão de curvatura, converge para uma curva não nula de suavidade uniforme. Veja a figura 7, coluna da direita.

O novo método foi usado com sucesso para suavizar contornos de fragmentos de cerâmica para fins de comparação multi-escala [23, 82]. Neste projeto, planejamos estudar melhor esse processo e compará-lo com outras alternativas (como a difusão de curvatura) de maneira mais sistemática.

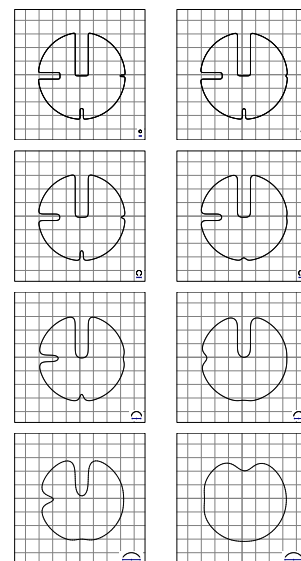


Figura 7:

Pesquisadores envolvidos: H. Leitão, J. Stolfi.

5.2 Determinação de contornos suaves para imagens binárias.

Neste sub-projeto, pretendemos desenvolver métodos inovadores para construir envoltórias suaves para conjuntos discretos de pontos. As aplicações incluem a geração de modelos suaves de órgãos a partir de radiografias ou tomogramas; a construção de modelos geométricos para caracteres a partir de suas imagens rasterizadas; a digitalização inteligente de mapas e desenhos esquemáticos; e muitas outras.

Em termos matemáticos, o problema é: dados dois conjuntos X e Y de pontos em \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 , encontrar uma envoltória — curva ou superfície, respectivamente — que tenha tangente contínua e que separe X de Y . Dentre as infinitas soluções, deseja-se encontrar envoltórias com suavidade máxima, segundo algum critério.

Inicialmente, pretendemos considerar o caso em que X é um subconjunto da grade inteira $V = \mathbb{Z}^2$ ou $V = \mathbb{Z}^3$, e Y é seu complemento nessa grade. Nesse caso, podemos nos restringir a envoltórias definidas por partes, sobre a malha retangular com vértices V .

Cada retalho pode ser descrito por um conjunto finito de parâmetros. Seja z um vetor que contém os parâmetros de todos os retalhos necessários. As condições de continuidade de tangente podem ser traduzidas a um conjunto $\mathcal{E} = \{E_1(z) = 0, \dots, E_m(z) = 0\}$ de equações (geralmente não-lineares) sobre esses coeficientes; e a suavidade pode ser expressa por um funcional de energia $Q(z)$ apropriado.

Desta forma, o problema reduz-se a encontrar o mínimo da função Q sobre a variedade algébrica definida pelas equações \mathcal{E} ; que pode ser resolvido por métodos numéricos clássicos de otimização não-linear. A forma particular das equações pode ser explorada para melhorar a eficiência e robustez desta solução.

Pesquisadores envolvidos: J. Stolfi.

Pós-graduandos: A. Malheiros.

5.3 Segmentação de vídeos por movimento de câmera

O objetivo deste sub-projeto é desenvolver um algoritmo robusto para detecção de movimentos de câmera em vídeos. Uma aplicação (que foi na verdade a motivação original) é a segmentação de vídeos de conferências, debates, e similares, onde uma única câmera estacionária aponta sucessivamente para os participantes à medida que estes tomam a palavra.

Em teoria, os movimentos da câmera podem ser deduzidos a partir do *fluxo ótico*, o movimento aparente de cada parte da imagem entre dois quadros sucessivos [130]. Veja a figura 8. A aplicação prática deste princípio enfrenta inúmeras dificuldades, incluindo a baixa qualidade dos vídeos (em consequência da alta taxa de compressão que é geralmente usada nessas aplicações), erros no cálculo do fluxo ótico (devido à ausência de texturas na cena), e eventuais movimentos na imagem que não são devidos a movimento da câmera.

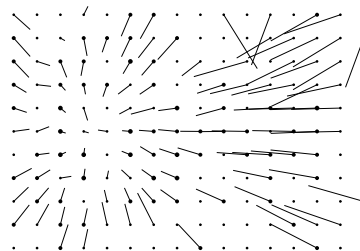


Figura 8:

Obtivemos recentemente bons resultados usando técnicas de mínimos quadrados para ajustar movimentos ideais da câmera ao fluxo ótico, juntamente com uma iteração não-linear para ajustar os pesos dos pixels nessa aproximação [99]. Neste projeto, pretendemos elaborar essa solução, levando em conta termos não-lineares no modelo teórico do fluxo ótico, e estendê-la para situações em que há translação (moderada) da câmera.

Pesquisadores envolvidos: N. Leite, J. Stolfi.

Pós-graduandos: R. Minetto.

5.4 Métodos fotométricos para visão 3D.

Neste sub-projeto, investigaremos vários métodos numéricos de aproximação que surgem em *visão estereoscópica* (ou *estéreo*) — a reconstrução da geometria tridimensional de um objeto a partir de duas ou mais fotos bidimensionais do mesmo. Estaremos considerando principalmente métodos de *estéreo fotométrico*, em que os dados são uma ou mais imagens do objeto tiradas do mesmo ângulo, mas com diferentes iluminações (figura 9). Pela comparação dos tons de cinza de cada pixel nas diferentes imagens, pode-se calcular a inclinação da superfície do objeto nesse ponto. A terceira dimensão é então obtida por integração numérica dessas inclinações.

Esta aplicação exige métodos inovadores de aproximação para funções definidas na esfera e outros em domínios não euclidianos. Um exemplo, que desempenha papel importante nas áreas de computação gráfica, projeto industrial, arquitetura e engenharia de iluminação, é a representação do *fluxo de luz* $\Phi(d)$ em um ponto p de um ambiente, definido como a potência das ondas de luz que passam nas vizinhanças de p e propagando-se em direções próximas a uma direção d . A função Φ é uma função esférica que pode ser modelada pelos métodos gerais discutidos na seção 3.1, ou por modelos específicos (fontes de luz circulares discretas).

Outra função relevante é a *função de tonalização* $\sigma(n)$, que, para algum ponto p da cena e para um determinado fluxo de luz, descreve a cor aparente que um elemento de superfície com direção normal n teria, se colocado no ponto p . Outro exemplo ainda é a *função bidirecional de distribuição radiância* (BRDF, da sigla em inglês) β de uma superfície, que diz qual a fração da luz que chega de uma direção d que é desviada para uma direção d' , em função de d e d' .

Os métodos de estéreo fotométrico que planejamos estudar baseiam-se na determinação experimental da função de tonalização σ , a partir de fotos de objetos de forma conhecida (*gabaritos de iluminação*). Estamos atualmene desenvolvendo métodos eficiente para a inversão numérica dessa função, que fornecem a inclinação n da superfície em cada ponto do objeto de interesse. Desenvolvemos também um método original, rápido e robusto para a integração desse mapa de inclinações, usando métodos multi-escala [125].

A análise acima pressupõe que as imagens foram previamente submetidas a uma *correção fotométrica*, de modo a tornar o valor de cada pixel proporcional à intensidade da luz incidente naquele ponto da imagem. Infelizmente, a maioria das câmeras adota uma correspondência não-linear complicada, e geralmente desconhecida, entre essas duas grandezas.

No decorrer deste projeto, pretendemos aperfeiçoar algoritmos especializados que desenvolvemos para determinar essa correspondência a partir de imagens de *escalas de tons* com valores de refletância conhecidos, levando em conta restrições de suavidade e monotonicidade.

Pesquisadores envolvidos: A. Gomide, H. Leitão, J. Stolfi, A. Montenegro, L. Velho. Pós-graduandos: R. Saracchini, D. Pereira.

5.5 Rastreamento de objetos deformáveis

O *rastreamento de objetos* em vídeos é um problema de computação visual com uma vasta gama de aplicações práticas. Dentro dessa área, um problema que tem atraído bastante atenção nos últimos anos é o rastreamento de objetos *deformáveis* — como, por exemplo, faces humanas (para biometria, videofone, etc.), peças flexíveis (manufatura), pessoas (cinema, animação, segurança), animais (pecuária, pesquisas biológicas, preservação ambiental), órgãos (imagens médicas), e muitos outros. Esta é uma área de pesquisa bastante fértil, com muitos problemas importantes ainda em aberto.

Na maioria das aplicações, conhece-se um *modelo deformável* do objeto — uma descrição matemática do mesmo, cujas dimensões, formato e posicionamento relativo à câmera dependem de um vetor q *parâmetros geométricos*. Para fins desta descrição, podemos supor que o modelo deformável é uma coleção finita de pontos $P(q) = \{p_1(q), p_2(q), \dots, p_n(q)\}$ no espaço \mathbb{R}^3 , cujas coordenadas dependem do vetor de parâmetros q , e cujas propriedades óticas (como cor e polimento) são conhecidas. Para simplificar a descrição, vamos supor que os parâmetros da câmera, como distância focal, são fixos e conhecidos; de modo que conhecemos a função F que projeta cada ponto p de \mathbb{R}^3 para o ponto $F(p)$ do plano da imagem.

O objetivo do rastreamento é então determinar um vetor q para cada quadro do vídeo, de modo a maximizar a compatibilidade entre as deformações e o posicionamento determinados por q e a

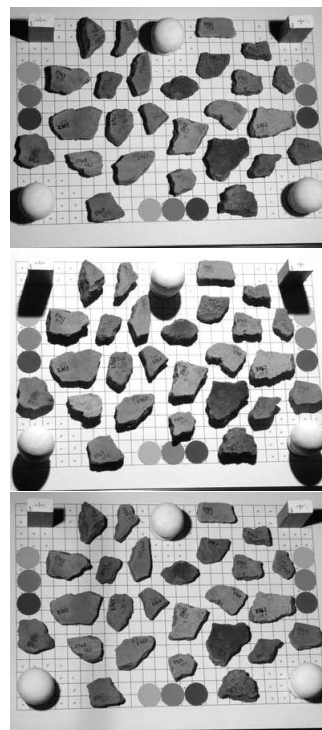


Figura 9:

aparência do objeto nessas imagens. Muitas aplicações exigem que a determinação do vetor q seja suficientemente precisa para que os pontos projetados $F(p_i(q))$ tenham erro menor que um pixel.

Soluções para este problema tipicamente usam um método indutivo ou incremental, em que o vetor de parâmetros q de um quadro é obtido extrapolando-se e ajustando-se os vetores q obtidos nos quadros anteriores. Na verdade, este processo indutivo é praticamente obrigatório em aplicações que exigem o rastreamento em tempo real. Para esse fim, o primeiro passo é determinar um conjunto de *correspondências* entre os pontos projetados $F(p_i(q))$, calculados a partir do vetor estimado q , e pontos p'_i do quadro corrente. Os pontos p'_i são encontrados por busca local, com base em critérios de semelhança local envolvendo cor, textura, sombreamento, silhuetas, etc. (vide seção 7.2). Por transitividade, supõe-se que os pontos p'_i são as projeções reais dos pontos $p_i(q)$.

Uma vez determinadas as correspondências, usa-se um algoritmo de otimização não-linear para encontrar o vetor q que minimiza a discrepância entre os pontos previstos e observados; isto é, a função $E(q) = \sum_i |F(p_i(q)) - p'_i|$. Geralmente usa-se um método de descida pelo gradiente.

Um sub-problema que pretendemos estudar neste projeto é o desenvolvimento de algoritmos de otimização especializados para esta aplicação. Dependendo do modelo usado, a função E pode ter um conjunto infinito de mínimos, constituindo um sub-espço do espaço de parâmetros. Nesse caso, é necessário usar técnicas como Levenberg-Marquardt [85, 92, 107] para garantir a estabilidade da solução entre quadros sucessivos. Outra direção a explorar é o aperfeiçoamento do algoritmo de determinação de correspondências e da métrica $E(q)$ usada para avaliar a discrepância, de modo a melhorar a convergência e confiabilidade do processo indutivo.

Pesquisadores envolvidos: S. Goldenstein, L. Velho.

6 Métodos intervalares

6.1 Aplicação de aritmética afim em computação visual

A aritmética afim (AA) é uma metodologia para cálculo numérico auto-validado, desenvolvido por Comba, Figueiredo, Stolfi e outros [22, 4, 34, 31, 64, 129, 98, 100, 116], para aliviar alguns problemas da aritmética intervalar tradicional (AI) [106].

As técnicas de aritmética afim produzem automaticamente aproximações lineares para funções em geral, com limites garantidos para os erros de aproximação e arredondamento. A figura 10 exemplifica a aproximação da função \sqrt{x} na aritmética afim, para $x \in [0.25 - 1.75]$.

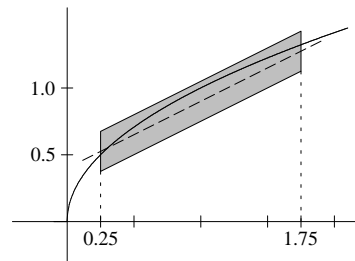


Figura 10:

O erro de aproximação da aritmética afim é geralmente proporcional ao quadrado das incertezas dos parâmetros, e portanto aritmética afim é muito mais precisa do que a aritmética intervalar, para intervalos suficientemente pequenos.

Por exemplo, a figura 11 mostra a função $\sqrt{x^2 - x + 1/2} / \sqrt{x^2 + 1/2}$ calculada na aritmética intervalar (retângulos cinza, esq.) e com aritmética afim (paralelogramos cinza, dir.).

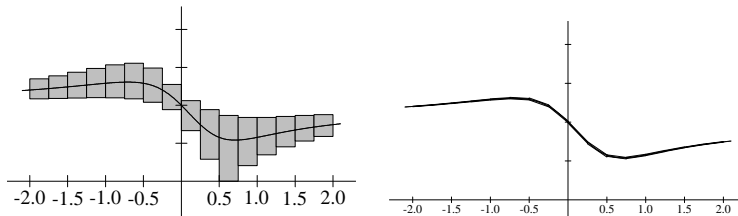


Figura 11:

Neste sub-projeto, estudaremos o uso de AA para produção de imagens sintéticas de modelos geométricos tridimensionais. A aritmética afim pode melhorar os algoritmos existentes (como traçado de raios) de várias maneiras: (1) oferecendo métodos garantidos para determinação de zeros de funções e projeção de superfícies, para modelos arbitrariamente complexos [29, 30]; (2) permitindo a substituição de inúmeros cálculos similares (por exemplo, lançamentos de raios, sombreamento, texturizações) por uma única aproximação linear [32, 33, 75]; (3) estimativa robusta de erros em cálculos não-lineares de visão computacional [66]; e (4) enumeração de subvariedades, como curvas implícitas e paramétricas e intersecção de superfícies [32, 35, 33, 15, 93, 141, 139].

Neste sub-projeto, planejamos ampliar e melhorar as aplicações da aritmética afim em problemas de computação visual; em particular, no traçado de raios com efeitos de penumbra, borrachamento e *anti-aliasing* [124, 116, 30].

Observamos também que as aplicações existentes de AA na enumeração de sub-variedades implícitas, como o algoritmo de intersecção de superfícies de Figueiredo e Stolfi [33] não utilizam o pleno potencial da AA. Apesar de mais rápidos e robustos do que os métodos baseados em AI, esses métodos ainda têm convergência de primeira ordem. Nossa primeira tarefa dentro deste sub-projeto será implementar e testar um algoritmo geral para enumeração de sub-variedades baseado em AA com convergência de segunda ordem, cujos fundamentos teóricos já foram desenvolvidos por Figueiredo e Stolfi.

Pesquisadores envolvidos: L. Figueiredo, J. Stolfi.

6.2 Comparação garantida de imagens em escala reduzida

A comparação de imagens multi-escala, descrita na seção 2.5, esbarra numa dificuldade fundamental: não é possível calcular um limite superior para a distância entre duas imagens $|I - J|$ a partir da distância entre suas versões reduzidas, $|I' - J'|$. Para certos tipos de imagens, como documentos ou impressões digitais, a distância $|I - J|$ somente pode ser estimada com alguma confiança se os detalhes essenciais — letras e sulcos, respectivamente — forem visíveis. Qualquer redução significativa da imagem vai eliminar esses detalhes, e vai reduzir todas as distâncias a quase zero. Nesse caso, a busca multi-escala ou não consegue eliminar um número significativo de imagens, ou acaba eliminando imagens desejadas por critérios irrelevantes.

Os métodos auto-validados podem oferecer uma saída para esse dilema. Especificamente, nas versões reduzidas das imagens, cada pixel é um *intervalo* que abrange os valores de seus sub-pixels, e não apenas a média desses sub-pixels. Desta forma, o cálculo da diferença $|I' - J'|$ com técnicas de aritmética intervalar [105, 106, 123] ou aritmética afim [22, 31] fornece estimativas *garantidas*, superior e inferior, para a distância $|I - J|$ na escala original.

Pesquisadores envolvidos: L. Figueiredo, J. Stolfi.

7 Aproximação de problemas contínuos por modelos discretos

7.1 Segmentação de imagens e vídeos

Trabalhos nesta área incluem segmentação de objetos em movimento em ambientes externos não controlados. Os métodos existentes, com base na subtração de imagens de um vídeo digital com um modelo do fundo destas imagens, não realizam satisfatoriamente esta segmentação [49] que é de fundamental importância para os métodos de rastreamento dos objetos ao longo de uma dada sequência. Neste sentido, o objetivo é definir modelos de segmentação de fundo e de rastreamento de objetos que sejam os mais gerais possíveis e que possam ser aplicados na análise e extração de

parâmetros que representem, por exemplo, desde experimentos biológicos a jogadores em vídeos de esportes.

Técnicas de rastreamento com uma ou múltiplas câmeras deverão ser consideradas visando a abordagem do problema de oclusões de múltiplos objetos. Este problema é de difícil solução e um método a ser adotado consiste da representação de um grafo em que os nós representam regiões segmentadas em cada quadro da seqüência e as arestas, distâncias entre estas regiões e que são ponderadas em função de informações de trajetórias, velocidade etc

Devido à complexidade e dimensão do grafo obtido para uma longa seqüência, métodos heurísticos que possibilitem uma análise dos diferentes objetos em oclusão, de forma essencialmente local, precisam ser investigados. alguns resultados nesta linha já foram publicados por N. Leite e P. Figueiroa [56, 57].

Pesquisadores envolvidos: N. Leite, A. Falcão. Pós-graduandos: L. Dorini, P. Figueiroa.

7.2 Determinação de correspondências aproximadas em imagens

O objetivo deste sub-projeto o desenvolvimento de algoritmos robustos para encontrar *correspondências* entre pontos de duas imagens. Este é um problema com inúmeras aplicações em computação visual, incluindo visão estereoscópica (seção 5.4), alinhamento de imagens (seção 2.4), análise de movimentos de câmera (seção 5.3) e rastreamento de objetos (seção 5.5).

Neste sub-projeto, entende-se que dois pontos p', p'' em duas imagens I', I'' são *correspondentes* se eles são o mesmo 3D que foi projetado de forma diferente, ou em momentos diferentes, em cada imagem. De forma geral, a correspondência é inferida a partir de alguma medida de similaridade entre as imagens, nas vizinhanças dos dois pontos. A medida mais simples é soma quadrática da diferença entre pixels correspondentes das duas vizinhanças. Este critério é muito usado em algoritmos genéricos para cálculo do fluxo ótico (vide seção 5.3), como o algoritmo multi-escala KLT de Kanade, Lucas e Tomasi [89, 136, 128].

Outros algoritmos usam medidas mais sofisticadas de similaridade, baseadas em descritores multidimensionais extraídos da região do entorno de cada ponto. Esta técnica é geralmente usada quando o conjunto de pontos relevantes para a aplicação — os *pontos característicos* — é relativamente pequeno. Esse é o caso, por exemplo, no rastreamento de faces e outros objetos deformáveis (vide seção 5.5), onde apenas alguns pontos da imagem (lábios, olhos, arestas de silhueta) possuem textura suficiente para determinação confiável das correspondências. Nesta abordagem, o problema se reduz a encontrar um emparelhamento ótimo entre dois conjuntos de descritores. A solução ingênua tem custo quadrático, mas diversas estruturas de dados e técnicas de aproximação [88] possibilitam soluções mais eficientes.

Independentemente da abordagem, a saída de um algoritmo de determinação de correspondências pode conter dois tipos de erros. A presença de ruído nas imagens, ou mudanças pequenas de geometria ou iluminação na cena, geralmente fazem com que os pontos p', p'' que maximizam a similaridade local estejam um pouco deslocados em relação ao par correto. Em circunstancias normais, estes erros são geralmente pequenos e podem ser adequadamente modelados por distribuições Gaussianas multidimensionais. Ocasionalmente, porém, o algoritmo de correspondência pode retornar um *par anômalo* de pontos p', p'' , cujas vizinhanças são similares por coincidência e não por causa de origem comum. Erros deste tipo podem ter magnitude arbitrariamente grande, e, via de regra, não podem ser modelados estatisticamente.

Tais pares anômalos podem causar sérios erros para a aplicação que depende das correspondências. Uma exemplo é o rastreamento de objetos deformáveis (seção 5.5). Um erro grosseiro na determinação de um par p_i, p'_i geralmente causa um deslocamento significativo na posição do ponto de mínimo q da função de discrepância E , ou pode mesmo criar um novo ponto de mínimo

local incorreto. Uma vez que o vetor de parâmetros q obtido para cada quadro é usado como estimativa inicial para a otimização no quadro seguinte, esses erros grosseiros tendem a se perpetuar e multiplicar ao longo do processo. Além disso, sempre que uma dessas correspondências anômalas ocorre ou deixa de ocorrer, o vetor calculado q sofre uma descontinuidade, que causa problemas para muitas aplicações.

Por essas razões, uma parte importante deste sub-projeto será o desenvolvimento de algoritmos para detecção e eliminação de casamentos anômalos, especialmente voltados para aplicações de rastreamento de objetos deformáveis, estéreo fotométrico, e estéreo geométrico. Soluções para este sub-problema podem usar apenas informações extraídas das imagens dadas [44]. Para detecção mais confiável, entretanto, é necessário usar informações sobre a natureza do objeto [58]. Recentemente, desenvolvemos um método deste segundo tipo para objetos deformáveis (seção 5.5). Nosso método estima a distribuição de probabilidade do gradiente da medida da discrepância, utilizando uma decomposição em sub-espacos baseada na função de deformação do modelo. Com isto, podemos medir a verossimilhança de cada correspondência encontrada, e descartar as menos prováveis. Este método se mostrou muito eficiente para tornar o rastreamento mais robusto [138], e para identificar oclusões [65]. Neste sub-projeto esperamos melhorar este algoritmo e desenvolver outros na mesma linha.

Pesquisadores envolvidos: S. Goldenstein, L. Velho.

7.3 Algoritmos heurísticos para o Problema da Galeria de Arte

O Problema da Galeria de Arte, proposto por Victor Klee em 1973, consiste em determinar o número mínimo de guardas suficiente para vigiar (ou cobrir) todo o interior de uma galeria de artes de n paredes. Pela ótica de geometria computacional, este problema pode ser entendido como aquele em que se procura o número mínimo de pontos S de um polígono simples P de tal forma que cada ponto no interior de P seja visível por, pelo menos, um ponto de S .

Este problema também é chamado de *Problema da Cobertura Minimal de Guardas*. Existem inúmeras variantes desse problema, sendo que algumas admitem solução polinomial, enquanto que outras são NP-difíceis [81]. Os principais resultados teóricos foram coletados por O'Rourke [113] e por Shermer [127].

Na variação do problema que será estudada aqui, pretende-se encontrar o número mínimo de guardas suficientes para cobrir o interior e todas as paredes de polígonos simples sem buracos, onde os guardas podem ser posicionados na fronteira do polígono, mas apenas em pontos previamente especificados. Pretendemos estudar algoritmos heurísticos para essa variante do problema, com foco em soluções que utilizem discretização do problema e a sua resolução através de métodos de otimização combinatória discreta, em especial, programação linear inteira.

Neste sub-projeto, definimos um *polígono* como uma coleção de n vértices v_1, v_2, \dots, v_n no plano, tais que todas as arestas $v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n, v_nv_1$ são disjuntas, exceto pelos vértices que arestas consecutivas compartilham. Note-se que, por esta definição, a região limitada pelo polígono é uma região conexa e simplesmente conexa (sem "buracos").

O problema que consideramos é escolher um conjunto mínimo S de pontos (os *guardas*) na fronteira de um polígono P (a *galeria*), de tal forma que todos os pontos de P sejam visíveis a partir de algum ponto de S . Os guardas podem estar situados quer nos vértices de P , quer ao longo de suas arestas; estes últimos são chamados de *pontos de Steiner*.

Sabe-se que $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ guardas são suficientes e, algumas vezes, necessários para cobrir polígonos de n vértices [21]. No entanto, esta quantidade pode ser muito maior do que o mínimo. Encontrar a solução ótima é um problema NP-difícil, o que tem motivado o desenvolvimento de algoritmos aproximados e heurísticas.

Por exemplo, na abordagem de Erdem e Sclaroff [50], o interior do polígono é aproximado por um conjunto finito de pontos tomados nas interseções de uma grade bidimensional, o que permite formular o problema da cobertura mínima como um problema de programação linear inteira (PLI), que pode ser resolvido com ferramentas padrões. A formulação do problema em PLI é um caso particular do problema de cobertura por conjuntos (*set covering*).

Para construir a formulação PLI, deve-se calcular o polígono de visibilidade [80] para cada posição candidata de guardas. Mais precisamente, é necessário determinar, para cada posição possível de um guarda, quais pontos da grade interiores ao polígono são visíveis daquela posição.

7.3.1 Aproximação com grade induzidas

A solução encontrada pelo método de Erdem e Sclaroff nem sempre é correta, pois o método garante apenas a cobertura dos pontos da grade, e não de todo o interior do polígono. A solução também pode não ser ótima, pois a busca se limita a subconjuntos de um conjunto finito de posições candidatas, e não a todo o perímetro de P . A resolução da grade afeta tanto a qualidade da solução quanto o tempo de cálculo. Grades mais finas tendem a produzir soluções que cobrem todo o interior com maior probabilidade (ou cobrem uma fração maior da área do polígono). Por outro lado, cada ponto da grade que está dentro do polígono gera uma restrição adicional na formulação por *PLI* do problema.

Em vez da grade regular de Erdem e Sclaroff, propomos usar a *grade induzida* $\mathcal{G}(P)$, obtida prolongando-se para dentro do polígono P todas as arestas do P que são adjacentes a vértices côncavos, até encontrar novamente a fronteira. Os pontos de interseção dessas arestas prolongadas constituem o conjunto $\mathcal{G}(P)$. Ainda que em um outro contexto, este conceito foi introduzido por C. Meneses e C. Souza [37] para polígonos retilineares, isto é, onde os ângulos em formados pelos lados do polígono que se encontram em um dos seus vértices são múltiplos de 90 graus. A figura 12 mostra exemplos de instâncias do problema de galeria de arte com polígono retilinear (no alto) e polígono simples (em baixo), com seus interiores representados pelas interseções da grade induzida (i.e., aquela obtida pela extensão dos seus respectivos lados).

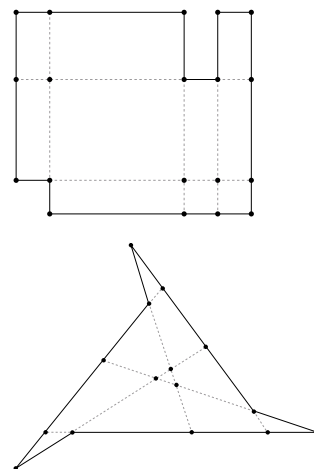


Figura 12:

7.3.2 Critérios alternativos de avaliação

Pretendemos estudar também outras variantes do problema, considerando outros tipos de polígonos, ou procurando otimizar outros parâmetros em vez do número de guardas. Por exemplo, para um número fixo N de guardas, pode-se desejar minimizar o percentual de área não coberta, ou o percentual de área multiplamente coberta.

Pesquisadores envolvidos: C. Souza, P. Rezende.

8 Anexos

8.1 Bancos de imagens biomédicas

Para investigações em análise de imagens biomédicas, dispomos dos bancos de imagens relacionados abaixo, provenientes de pesquisas anteriores (incluindo PRONEX 03/09862-3, projeto temático FAPESP 02/13238-6, FAPESP 2005/52596-8, FAPESP 2002/10434-3 FAPESP 2001/13593-2, CNPq 300818/94-7(NV) 03/2005 até 03/2008).

Todos os bancos incluem dados detalhados biológicos e clínicos dos pacientes. Em todos estes modelos, o diagnóstico foi assegurado por “gold standards” externos ou por concordância diagnóstica de vários observadores considerados especialistas no assunto.

1. 8900 imagens de núcleos (citologia) de cardiomiócitos de ratos normais em diferentes idades de desenvolvimento para testar o potencial diagnóstico da idade da gestação.
2. cerca de 480 imagens de quelóides e cictarizes hipertróficas (histologia, patologia humana), para testar o potencial diagnóstico das variáveis .
3. cerca de 7000 imagens de núcleos de 4 diferentes lesões foliculares da tireóide (histologia, patologia humana) para testar o potencial diagnóstico.
4. cerca de 19000 imagens de núcleos do tumor venéreo transmissível do cão (citologia, patologia veterinária) para testar o valor prognóstico (resposta a quimioterapia)
5. cerca de 9000 imagens de núcleos de carcinomas basocelulares (histologia, patologia humana) para testar o valor prognóstico em relação a recidivas.
6. cerca de 9000 imagens de núcleos de blastos de pacientes com leucemia aguda (citologia, patologia humana) para testar o valor prognóstico em relação à sobrevida.
7. cerca de 5000 imagens de núcleos de células da medula óssea em pacientes com síndromes mielodisplásicas (citologia, patologia humana) para testar o valor diagnóstico.
8. cerca de 11 000 imagens de núcleos de escovado brônquico de pacientes com neoplasias do pulmão (citologia, patologia humana) para testar o valor diagnóstico.
9. cerca de 300 imagens da vascularização de diferentes neoplasias da glândula salivar (histologia, imunohistoquímica, patologia humana) para avaliar o valor diagnóstico.
10. cerca de 4000 imagens das regiões organizadoras do nucléolo em carcinomas do pulmão (histologia, patologia humana).

Referências

- [1] S. Abbasi, F. Mokhtarian, and J.V. Kittler. Enhancing CSS-based shape retrieval for objects with shallow concavities. *Image and Vision Computing*, 18(3):199–211, Fevereiro 2000.
- [2] R. L. Adam, K. Metze, and N. J. Leite. Spectral - um software para síntese de áudio a partir de transformadas lineares. Brazilian Patent INPI 43.232, March 2002.
- [3] Pankaj K. Agarwal. Geometric range searching. In *CRC Handbook of Computational Geometry*. CRC, 1997.
- [4] Marcus V. A. Andrade, João L. D. Comba, and Jorge Stolfi. Affine arithmetic. In *Abstracts of the International Conference on Interval and Computer-Algebraic Methods in Science and Engineering (INTERVAL/94)*, pages 36–40, St. Petersburg (Russia), March 1994.
- [5] Marcus Vinícius A. Andrade, Wagner F. Barros, and Jorge Stolfi. An exact algorithm for point location on spherical maps. In *Anais do GEOINFO 2002 - IV Simpósio Brasileiro de Geoinformática*, pages 99–107, December 2002.
- [6] Marcus Vinícius A. Andrade and Jorge Stolfi. Exact algorithms for circles on the sphere. In *Proc. 14th ACM Symposium on Computational Geometry*, pages 126–134, Minneapolis, MN, June 1998.
- [7] Marcus Vinícius A. Andrade and Jorge Stolfi. Exact algorithms for circles on the sphere. *International J. of Computational Geometry & Applications*, 11(3):267–290, June 2001.
- [8] Marcus Vinícius Alvim Andrade. *Representação e Manipulação Exatas de Mapas Esféricos*. PhD thesis, Institute of Computing, University of Campinas, March 1999. (In Portuguese).
- [9] A. Ben-Tal and A. Ben-Israel. Ordered incidence geometry and the geometric foundations of convexity theory. *J. of Geometry*, 30:103–122, 1987.
- [10] Francisco N. Bezerra and Neucimar J. Leite. Using string matching to detect video transitions. *Pattern Analysis and Applications*, 10(1):45–54, February 2007.
- [11] A. Del Bimbo. *Visual Information Retrieval*. Morgan Kaufmann Publishers Inc, San Francisco, CA, USA, 1999.
- [12] A. Del Bimbo and P. Pala. Shape indexing by multi-scale representation. *Image and Vision Computing*, 17(3):245–261, 1999.
- [13] H. Blum. A transformation for extracting new descriptors of shape. *Models for the Perception of Speech and Visual Forms*, pages 362–380, 1967.
- [14] M. Bober. MPEG-7 visual shape descriptors. *IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology*, 11(6):716–719, 2001.
- [15] Adrian Bowyer, Ralph Martin, Huahao Shou, and Irina Voiculescu. Affine intervals in a CSG geometric modeller. In *Proc. Uncertainty in Geometric Computations*, pages 1–14. Kluwer Academic Publishers, July 2001.

- [16] Cláudio G. S. Cardoso, Maria Cristina C. Cunha, Anamaria Gomide, Denis J. Schiozer, and Jorge Stolfi. Finite elements on dyadic grids for oil reservoir simulation. *Mathematics and Computers in Simulation*, 73(1–4):87–104, November 2006. doi:10.1016/j.matcom.2006.06.024.
- [17] Cláudio Guido Silva Cardoso. Grades diádicas adaptativas para simulação de escoamento de petróleo. Master’s thesis, Institute of Computing, University of Campinas, December 2004. (In Portuguese).
- [18] P. C. Carvalho and L. H. Figueiredo. *Introdução à Geometria Computacional*. 18 Colóquio Brasileiro de Matemática. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1991.
- [19] M. A. Chaves. *Modelos digitais de elevação hidrologicamente consistentes para a bacia amazônica*. PhD thesis, Departamento de Engenharia Florestal, Universidade Federal de Viçosa, 2002.
- [20] L. P. Chew and R. L. Drysdale, III. Voronoi diagrams based on convex distance functions. In *Proc. 1st Annu. ACM Sympos. Comput. Geom.*, pages 235–244, 1985.
- [21] V. Chvátal. A combinatorial theorem in plane geometry. In *J. Combin. Theory Ser.*, volume B 18, pages 39–41, 1975.
- [22] João L. D. Comba and Jorge Stolfi. Affine arithmetic and its applications to computer graphics. In *Anais do VI Simpósio Brasileiro de Computação Gráfica e Processamento de Imagens (SIBGRAPI’93)*, pages 9–18, Recife (Brazil), October 1993.
- [23] Helena Cristina da Gama Leitão. *Reconstrução Automática de Objetos Fragmentados*. PhD thesis, Institute of Computing, University of Campinas, November 1999. (In Portuguese).
- [24] R. da S. Torres and Alexandre X. Falcão. Contour salience descriptors for effective image retrieval and analysis. *Image and Vision Computing*, 2006. To appear.
- [25] R. da S. Torres, A.X. Falcão, and L. da F. Costa. A graph-based approach for multiscale shape analysis. *Pattern Recognition*, 37(6):1163–1174, 2004.
- [26] Marcelo de A. Oliveira and Neucimar J. Leite. Reconnection of fingerprint ridges based on morphological operators and multiscale directional information. In *Proc.XVII Brazilian Symposium on Computer Graphics and Image Processing - SIBGRAPI 2004*, pages 122–129, 2004.
- [27] Marcelo de A. Oliveira and Neucimar J. Leite. Multiscale directional operator and morphological tools for reconnecting broken ridges in fingerprint images. *Pattern Recognition*, page (to appear), 2007.
- [28] M. de Berg, M. van Kreveld, M. Overmars, and O. Schwarzkopf. *Computational Geometry: Algorithms and Applications*. Springer, 1997. Disponível em <http://www.cs.ruu.nl/geobook/>.
- [29] Affonso de Cusatis Jr. Traçado de raios de superfícies implícitas com aritmética afim. Master’s thesis, Departamento de Informática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, April 1999. (in Portuguese).

- [30] Affonso de Cusatis Jr., Luiz H. Figueiredo, and Marcelo Gattass. Interval methods for ray casting surfaces with affine arithmetic. In *Proceedings of SIBGRAPI'99 - the 12th Brazilian Symposium on Computer Graphics and Image Processing*, pages 65–71, 1999.
- [31] L. H. de Figueiredo and J. Stolfi. Affine arithmetic: Concepts and applications. *Numerical Algorithms*, 37(1-4):147–158, December 2004.
- [32] L. H. de Figueiredo, J. Stolfi, and L. Velho. Approximating parametric curves with strip trees using affine arithmetic. *Computer Graphics Forum*, 22(2):171–179, 2003.
- [33] Luiz H. de Figueiredo and Jorge Stolfi. Adaptive enumeration of implicit surfaces with affine arithmetic. *Computer Graphics Forum*, 15(5):287–296, December 1996.
- [34] Luiz H. de Figueiredo and Jorge Stolfi. *Self-Validated Numerical Methods and Applications*. Brazilian Mathematics Colloquium monographs. IMPA/CNPq, Rio de Janeiro, Brazil, 1997.
- [35] Luiz H. de Figueiredo, Ronald Van Iwaarden, and Jorge Stolfi. Fast interval branch-and-bound methods for unconstrained global optimization with affine arithmetic. Technical Report IC-97-08, Institute of Computing, Univ. of Campinas, June 1997.
- [36] L. De Floriani and P. Magillo. Algorithms for visibility computation on terrains: a survey. *Environment and Planning B: Planning and Design*, 30(5):709–7286, 2003.
- [37] Claudio N. de Meneses and Cid C. de Souza. Exact solutions of rectangular partitions via integer programming. *International Journal of Computational Geometry and Applications*, 10(5):477–522, 2000.
- [38] P. J. de Rezende. Computing convex hulls on Beckenbach and Drandell geometries. In *Proceedings of the 16th Fall Workshop on Computational Geometry*, Northampton, MA, USA, 2006. to appear.
- [39] P. J. de Rezende and C. N. Gon. GeoPrO: Geometria projetiva orientada com tratamento de degenerações. In *Anais do VIII Simpósio Brasileiro de Computação Gráfica e Processamento de Imagens*, pages 315–316, 1995.
- [40] P. J. de Rezende and G. A. Pinto. Additively weighted voronoi diagram on the oriented projective plane. In *Proceedings of the 12th Canadian Conference on Computational Geometry*, volume 1, pages 119–126, 2000.
- [41] P. J. de Rezende and J. Stolfi. *Fundamentos de Geometria Computacional*. IX Escola de Computação. Universidade Federal de Pernambuco, 1994.
- [42] P. J. de Rezende and R. B. Westrupp. An optimal algorithm to construct all voronoi diagrams for k nearest neighbor search in T^2 . In *Anais do XII Simpósio Brasileiro de Computação Gráfica e Processamento de Imagens*, volume 1, pages 7–15. IEEE Computer Society, 1999.
- [43] M. O. Domingues, S. M. Gomes, and L. M. A. Diaz. Adaptive wavelet representation and differentiation on block-structured grids. *Applied Numerical Mathematics*, 47(3–4):421–437, 2003.
- [44] Leyza Dorini and Siome Goldenstein. Unscented klt: Nonlinear feature and uncertainty tracking. In *SIBGRAPI*, 2006.

- [45] M. Drandell. Generalized convex sets in the plane. *Duke Mathematical Journal*, 19:537–547, 1952.
- [46] R. L. Drysdale, III. A practical algorithm for computing the Delaunay triangulation for convex distance functions. In *Proc. 1st ACM-SIAM Sympos. Discrete Algorithms*, pages 159–168, 1990.
- [47] H. Edelsbrunner. *Algorithms in Combinatorial Geometry*, volume 10 of *EATCS Monographs on Theoretical Computer Science*. Springer, 1987.
- [48] H. Edelsbrunner, J. van Leeuwen, T. Ottmann, and D. Wood. Computing the connected components of simple rectilinear geometrical objects in d -space. *RAIRO Inform. Theor.*, 18:171–183, 1984.
- [49] A. Elgammal, D. Harwood, and L. Davis. Non-parametric model for background subtraction. In *Proceedings of the European Conference on Computer Vision*, pages 751–767, 2000.
- [50] Ugur Murat Erdem and Stan Sclaroff. Automated placement of cameras in a floorplan to satisfy task-specific constraints. Technical report, Boston University, Computer Science Department, 2003.
- [51] A. X. Falcão, C. T. N. Suzuki, J. F. Gomes, J. P. Papa, L. C. S. Dias, and S. H. Shimizu. Depósito INPI 018060127002, Brazil, 2006.
- [52] A.X. Falcao, J. Stolfi, and R. de A. Lotufo. The image foresting transform: Theory, algorithms, and applications. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 26(1):19–29, 2004.
- [53] G. Farin. *NURB Curves and Surfaces, from Projective Geometry to Practical Use*. A.K. Peters, 1995.
- [54] C. A. Felgueiras. Modelagem numérica de terreno. In G. Câmara, C. Davis, and A. M. V. Monteiro, editors, *Introdução à Ciência da Geoinformação*. INPE, 2001.
- [55] F. D. C. Figueiredo. Problemas geométricos na geometria G_F . Master’s thesis, Instituto de Computação, Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), 2005.
- [56] Pascual J. Figueroa, Neucimar J. Leite, and Ricardo M. L. Barros. Background recovering in outdoor image sequences: An example of soccer players segmentation. *Image and Vision Computing*, 2006(24):363–374, 2006.
- [57] Pascual J. Figueroa, Neucimar J. Leite, and Ricardo M. L. Barros. Tracking soccer players aiming their kinematical motion analysis. *Computer Vision and Image Understanding*, 2006(101):122–135, 2006.
- [58] M. Fischler and R. Bolles. Random sample consensus: A paradigm for model fitting with applications to image analysis and automated cartography. In *Communications of the ACM*, volume 24, pages 381–395, 1981.
- [59] P. F. Fisher. Extending the applicability of viewsheds in landscaping planning. *Environment and Planning B: Planning and Design*, 22:527–546, 1996.
- [60] W. R. Franklin, M. Inanc, and Z. Xie. Two novel surface representation techniques. In *Autocarto 2006*, Vancouver, Canada, 2006.

- [61] W. R. Franklin and C. Ray. Higher isn't necessarily better: Visibility algorithms and experiments. In *6th Symposium on Spatial Data Handling*, Edinburgh, Scotland, 1994.
- [62] W. R. Franklin and C. Vogt. Efficient multiple observer siting on large terrain cells. In *Third International Conference on Geographic Information Science*, University of Maryland, 2004.
- [63] W. R. Franklin and C. Westort. Alternative sculpting hypotheses for terrain data compression. In *Proceedings of XVI Advanced Signal Processing Algorithms, Architectures, and Implementations*, San Diego, USA, 2006.
- [64] Olivier Gay. Libaa - C++ affine arithmetic library for GNU/Linux. Available at <http://www.nongnu.org/libaa/>, April 2003.
- [65] Siome Goldenstein and Christian Vogler. When occlusions are outliers. In *IEEE Workshop of 25 years of RANSAC*, 2006.
- [66] Siome Goldenstein, Christian Vogler, and Dimitris Metaxas. Cue integration using affine arithmetic and gaussians. Technical Report MS-CIS-02-06, University of Pennsylvania, 2002.
- [67] S. M. Gomes, A. K. Kushpel, and A. Levesley. Approximation in L^2 Sobolev spaces on S^2 by quasi-interpolation. In *Anais do 48º Seminário Brasileiro de Análise*, pages 643–659, Petrópolis, RJ, 1998.
- [68] S. M. Gomes, A. K. Kushpel, and A. Levesley. Approximation in L^2 Sobolev spaces on S^2 by quasi-interpolation. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 7(3):283–295, 2001.
- [69] S. M. Gomes, A. K. Kushpel, A. Levesley, and D. L. Ragozin. sk -spline interpolation on the torus using number theoretic knots. In L. L. Schumaker A. Le. Mehaute, C. Rabut, editor, *Curves and Surfaces with Applications in CAGD*, pages 143–149. Vanderbilt University Press, 1996.
- [70] S. M. Gomes, A. K. Kushpel, A. Levesley, and D. L. Ragozin. Interpolation on the torus using sk -splines with number theoretic knots. *Journal of Approximation Theory*, 98(1):56–71, 1998.
- [71] Anamaria Gomide. *Splines Polinomiais Não Homogêneos na Esfera*. PhD thesis, Institute of Computing, University of Campinas, May 1999. (In Portuguese).
- [72] Anamaria Gomide and Jorge Stolfi. Approximation error maps. In *Proceedings of A4A4 - IV International Symposium on Algorithms for Approximation*, pages 446–453, July 2001. Published in 2002.
- [73] Silvio J. F. Guimaraes, Michel Couprie, Arnaldo de A. Araujo, and Neucimar J. Leite. Video segmentation based on 2D image analysis. *Pattern Recognition Letters*, 24(7):947–2003, April 2003.
- [74] M. M. Harada. *Convexidade e Proximidade em Geometrias não Euclidianas*. PhD thesis, Instituto de Computação, Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), 2000.
- [75] W. Heidrich, Ph. Slusallek, and Hans-Peter Seidel. Sampling procedural shaders using affine arithmetic. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 17(3):158–176, July 1998.
- [76] M.K. Hu. Visual pattern recognition by moment invariants. *IEEE Transactions on Information Theory*, 8(2):179–187, Fevereiro 1962.

- [77] P. T. Jackway and M. Deriche. Scale-space proprieties of the multiscale morphological dilation-erosion. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 18:38–51, 1996.
- [78] R. Klein. *Concrete and Abstract Voronoi Diagrams*, volume 400 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer, 1989.
- [79] R. Klein and D. Wood. Voronoi diagrams based on general metrics in the plane. In *Proc. 5th Sympos. Theoret. Aspects Comput. Sci.*, volume 294 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 281–291. Springer, 1988.
- [80] D T Lee. Visibility of a simple polygon. *Comput. Vision, Graphics, and Image Process*, 22:207–221, 1983.
- [81] D T Lee and A K Lin. Computational complexity of art gallery problems. *IEEE Trans. Inf. Theor.*, 32(2):276–282, 1986.
- [82] Helena C. G. Leitão and Jorge Stolfi. A multiscale method for the reassembly of two-dimensional fragmented objects. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 24(9):1239–1251, September 2002.
- [83] Neucimar Jerônimo Leite and Leyza Baldo Dorini. A scaled morphological toggle operator for image transformations. In *Proceedings of SIBGRAPI 2006*, pages 323–330. IEEE Computer Society, 2006.
- [84] Neucimar Jerônimo Leite and Marta Duarte Teixeira. An idempotent scale-space approach for morphological segmentation. In *Mathematical Morphology and its Applications to Image and Signal Processing*, pages 291–300. Kluwer Academic Publishers, 2000.
- [85] K. Levenberg. A method for the solution of certain problems in least squares. *Quart. Appl. Math.*, 2:164–168, 1944.
- [86] Z. Li, Q. Zhu, and C. Gold. *Digital Terrain Modeling - principles and methodology*. CRC Press, 2005.
- [87] S. Loncaric. A survey of shape analysis techniques. *Pattern Recognition*, 31(8):983–1190, agosto 1998.
- [88] D. Lowe. Distinctive image features from scale-invariant keypoints. *IJCV*, 60(2):91–110, 2004.
- [89] B.D. Lucas and T. Kanade. An iterative image registration technique with an application to stereo vision. In *IJCAI81*, pages 674–679, 1981.
- [90] S. Mallat. *Wavelet Signal Processing*. Academic Press, 1996.
- [91] B. B. Mandelbrot. *The Fractal Geometry of Nature*. W. H. Freeman, San Francisco, CA, USA, 1982.
- [92] D. Marquardt. An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. *SIAM J. Appl. Math.*, 11:431–441, 1963.
- [93] Ralph Martin, Huahao Shou, Irina Voiculescu, and Guojin Wang. A comparison of Bernstein hull and affine arithmetic methods for algebraic curve drawing. In *Proc. Uncertainty in Geometric Computations*, pages 143–154. Kluwer Academic Publishers, July 2001.

- [94] M. McAllister and J. Snoeyink. Extracting consistent watersheds from digital river and elevation data. In *Proc. ASPRS/ACSM Annu. Conf.*, 1999.
- [95] Peter Meer, C. Allen Sher, and Azriel Rosenfeld. The chain pyramid: Hierarchical contour processing. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 12(4):363–375, 1990.
- [96] N. Megiddo. Linear-time algorithms for linear programming in R^3 and related problems. *SIAM J. Comput.*, 12:759–776, 1983.
- [97] J. B. Mendes, C. D. Ferreira, and M. V. A. Andrade. Localização exata de pontos em mapas esféricos usando uma adaptação da árvore de partição binária do espaço. In *Anais do VI Simpósio Brasileiro de Geoinformática*, 2004.
- [98] F. Messine. Extensions of affine arithmetic: Application to unconstrained global optimization. *Journal of Universal Computer Science*, 8(11):992–1015, November 2002.
- [99] Rodrigo Minetto, Neucimar J. Leite, and Jorge Stolfi. Reliable detection of camera motion based on weighted optical flow fitting. In *Proceedings of VISAPP'07*, page (to appear), May 2007.
- [100] Shinya Miyajima. On the improvement of the division of the affine arithmetic. WWW document at <http://www.kashi.info.waseda.ac.jp/Non-linear/thesis-e.html>, 2000.
- [101] F. Mokhtarian. A theory of multiscale, curvature-based shape representation for planar curves. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 14(8):789–805, 1992.
- [102] F. Mokhtarian and S. Abbasi. Shape similarity retrieval under affine transformations. *Pattern Recognition*, 35(1):31–41, 2002.
- [103] F. Mokhtarian, S. Abbasi, and J. Klitter. Efficient and robust retrieval by shape content through curvature scale space. In *First International Workshop on Image Databases and Multi-Media Search*, pages 35–42, Amsterdam, Netherlands, Agosto 1996.
- [104] Farzin Mokhtarian. Silhouette-based isolated object recognition through curvature scale space. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 17(5):539–544, 1995.
- [105] R. E. Moore. *Interval Analysis*. Prentice-Hall, 1966.
- [106] R. E. Moore. *Methods and Applications of Interval Analysis*. SIAM, Philadelphia, 1979.
- [107] J.J. Moré. The levenberg-marquardt algorithm: Implementation and theory. In G. A. Watson, editor, *Numerical Analysis*, Lecture Notes in Mathematics 630, pages 105–116. Springer Verlag, 1977.
- [108] K. Mulmuley. *Computational Geometry, An Introduction Through Randomized Algorithms*. Prentice-Hall, 1994.
- [109] G. Nagy. Terrain visibility. *Computer & Graphics*, 18(6):763–773, 1994.

- [110] A. G. Oliveira, P. J. de Rezende, and F. P. Selmi-Dei. An extension of CGAL to the oriented projective plane T^2 and its dynamic visualization system. In *21st Annual ACM Symp. on Computational Geometry*, 2005.
- [111] K. Onishi. Voronoi diagram in the d -dimensional hyperbolic space,. In *Proc. Internat. Sympos. on Combinatorics and Applications*, pages 314–324. Nankai Univ., 1996.
- [112] J. O’Rourke. *Computational Geometry in C*. Cambridge University Press, 1994.
- [113] Joseph O’Rourke. *Art Gallery Theorems and Algorithms*. Oxford University Press, 1987.
- [114] D. O’Sullivan and A. Turner. Visibility graphs and landscape visibility analysis. *International Journal of Geographic Information Science*, 22(11):221–237, 2001.
- [115] J. (ed.) Pach. New trends in discrete and computational geometry. *Algorithms and Combinatorics*, 10, 1993.
- [116] Afonso Paiva, Luiz Henrique de Figueiredo, and Jorge Stolfi. Robust visualization of strange attractors using affine arithmetic. *Computers & Graphics*, 30(6):1020–1026, December 2006.
- [117] M. M. Peixoto. On convexity. *Anais da Acadêmia Brasileira de Ciências*, 21:291–302, 1949.
- [118] G. A. Pinto and P. J. de Rezende. Representation of conics in the oriented projective plane. In *Proc. of the X SIBGRAPI*, pages 71–78. IEEE Computer Society, 1997.
- [119] F. P. Preparata and M. I. Shamos. *Computational Geometry: An Introduction*. Springer, 1985.
- [120] F. F. Pruski, A. F. Teixeira, D. D. Silva, R. A. Cecílio, J. M. A. Silva, and N. P. Griebeler. *Hidros - Dimensionamento de Sistemas Hidroagrícolas*. Editora UFV, 2006.
- [121] G. J. E. Rawlins and D. Wood. Computational geometry with restricted orientations. In *Proc. 13th IFIP Conf. System Modelling and Optimization*, volume 113 of *Lecture Notes in Control and Information Science*, pages 375–384. Springer, 1988.
- [122] Anderson Rocha and Siome Goldenstein. Processo e equipamento de randomização progressiva para análise e raciocínio em multimídia. Depósito INPI 018060110496, Brazil, 2006.
- [123] S. M. Rump. Algorithms for verified inclusions: Theory and practice. In R. E. Moore, editor, *Reliability in Computing: The Role of Interval Methods in Scientific Computing*, volume 19 of *Perspectives in Computing*, pages 109–126. Academic Press, Boston, MA, 1988.
- [124] David Salesin and Jorge Stolfi. Rendering CSG models with a ZZ-buffer. In *Proc. SIGGRAPH ’90*, pages 67–76. ACM Press/Addison-Wesley, August 1990.
- [125] Rafael Saracchini, Helena Cristina da Gama Leitão, and Jorge Stolfi. Construção de mapas de inclinação a partir de imagens com diferentes iluminações. In *Proc. Workshop de Iniciação Científica – 18th Brazilian Symposium on Computer Graphics and Image Processing (SIBGRAPI 2005)*, volume CD-ROM, pages 1–7. IEEE Computer Press, October 2005. In Portuguese.
- [126] M. I. Shamos. *Computational Geometry*. PhD thesis, Dept. Comput. Sci., Yale Univ., 1978.

- [127] Thomas C. Shermer. Recent results in art galleries. *Proceedings of the IEEE*, 80(9):1384–1399, september 1992.
- [128] Jianbo Shi and Carlo Tomasi. Good features to track. In *CVPR*, pages 593–600, 1994.
- [129] Huahao Shou, Ralph Martin, Irina Voiculescu, Adrian Bowyer, and Guojin Wang. Affine arithmetic in matrix form for polynomial evaluation and algebraic curve drawing. *Progress in Natural Science*, 12(1):77–81, January 2002.
- [130] E. Simoncelli. *Handbook of Computer Vision and Applications*, volume II, chapter Bayesian Multi-scale Differential Optical Flow, pages 397–422. Academic Press, 1999.
- [131] J. Stolfi. *Oriented Projective Geometry: A Framework for Geometric Computations*. Academic Press, 1991.
- [132] Eric J. Stollnitz, Tony D. DeRose, and David H. Salesin. *Wavelets for Computer Graphics: Theory and Applications*. Morgan Kaufmann, San Francisco, CA, 1996.
- [133] S. Tabbone, L. Wendling, and J.-P. Salmon. A new shape descriptor defined on the radon transform. *Computer Vision and Image Understanding*, 102(1):42–51, 2006.
- [134] D. G. Tarboton and D. P. Ames. Advances in the mapping of flow networks from digital elevation data. In *World Water and Environmental Resources Congress*, pages 79–88, Orlando, Florida, 2001.
- [135] Y.A. Teng, DeMenthon D., and L.S. Davis. Stealth terrain navigation. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 23(1):96–110, 1993.
- [136] Carlo Tomasi and Takeo Kanade. Detection and tracking of point features. Technical Report CMU-CS-91-132, Carnegie Mellon University, April 1991.
- [137] G. T. (ed.) Toussaint. *Computational Geometry*. North-Holland, 1985.
- [138] Christian Vogler, Siome Goldenstein, Jorge Stolfi, Vladimir Pavlovic, and Dimitris Metaxas. Outlier rejection in high-dimensional deformable models. *IVC*, 2007.
- [139] Irina Voiculescu, Jakob Berchtold, Adrian Bowyer, Ralph R. Martin, and Qijiang Zhang. Interval and affine arithmetic for surface location of power- and Bernstein-form polynomials. In *Proc. Mathematics of Surfaces IX*, pages 410–423. Springer, September 2000.
- [140] T.P. Wallace and P. Wintz. An efficient three-dimensional aircraft recognition algorithm using normalised fourier descriptors. *Computer Graphics Image Processing*, 13(2):99–126, 1980.
- [141] Q. Zhang and R. R. Martin. Polynomial evaluation using affine arithmetic for curve drawing. In *Proc. of Eurographics UK 2000 Conference*, pages 49–56, 2000.